Annales du CAPES externe de Mathématiques 2009 à 2011

+ 2 problème d'entraînement

= 8 problèmes corrigés

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi

Table des matières

Avant-propos **5**

I ECRITS 1 **7**

1 CAPES externe 2009, épreuve 1 **9**
1.1 Énoncé 9
1.2 Corrigé 21

2 CAPES externe 2010, épreuve 1 **61**
2.1 Énoncé 61
2.2 Corrigé 70

3 CAPES externe 2011, épreuve 1 **91**
3.1 Énoncé 91
3.2 Corrigé 97

II ECRITS 2 **121**

4 CAPES externe 2009, épreuve 2 **123**
4.1 Énoncé 123
4.2 Corrigé 131
4.3 Compléments 154
4.3.1 Nombre de tangentes à une conique issues d'un point . . 155
4.3.2 Les théorèmes de Poncelet 160
4.3.3 Une symétrie gauche qui conserve l'ellipse 163
4.3.4 Ellipse de Steiner 165

5 CAPES externe 2010, épreuve 2 **169**
5.1 Énoncé 169

5.2 Corrigé 178
5.3 Compléments 205
5.3.1 Identification d'une suite à une série formelle 205
5.3.2 Principe du berger 206
5.3.3 Trois lemmes sur les cardinaux 207
5.3.4 Chemins de Dyck et parenthésage 209

6 CAPES externe 2011, épreuve 2 213
6.1 Énoncé 213
6.2 Corrigé 219
6.3 Compléments 247
6.3.1 Aire de l'intérieur d'une ellipse 247
6.3.2 Volume d'un ellipsoïde 248
6.3.3 Norme opérateur d'une matrice symétrique 250

III PROBLEMES D'ENTRAINEMENT 253

7 Endomorphismes cycliques 255
7.1 Énoncé 255
7.2 Corrigé 262

8 Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$ 281
8.1 Énoncé 281
8.2 Corrigé 284

© 2023 Dany-Jack Mercier & Jean-Etienne Rombaldi.
Tous droits réservés.

Avant-propos

Voici un recueil des compositions du CAPES externe des années 2009 à 2011, avec des corrigés détaillés, des compléments et deux problèmes supplémentaires d'entraînement.

Le "nouveau CAPES" se met en place pour la session 2011. L'écrit 2011 est pour la première fois placé en novembre 2010, ce qui laisse quelques mois pour préparer les oraux qui, eux, restent programmés entre le 15 juin et le 15 juillet 2011.

Le programme de l'écrit du CAPES 2011 change peu par rapport aux précédents. S'il existait jusque là un programme bien détaillé sur lequel on pouvait facilement se reporter, les choses sont devenues plus difficiles à la session 2011 où le programme des révisions de l'écrit devient officiellement constitué de la réunion des programmes des collèges et des lycées, de ceux des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) et des sections de techniciens supérieurs (STS). Grosso modo, il faudra bien connaître le programme de CPGE ou celui des trois années de licence.

Le jury 2011 a récemment insisté sur le fait que les deux compositions écrites du CAPES externe :

- pouvaient consister en un problème ou en plusieurs petits problèmes indépendants permettant de couvrir de grandes parties du programme,

- n'étaient en aucun cas spécialisées dans des domaines quelconques : il ne faut pas penser à la première épreuve comme une épreuve d'analyse et de probabilité, ni à la seconde épreuve comme étant destinée à traiter de questions de géométrie ou d'algèbre.

Preuve par les faits : la première composition 2011 comportait trois problèmes indépendants, un premier petit problème de géométrie plane suivi de deux problèmes d'analyse où l'on retrouvait les polynômes de Laguerre (donc un peu d'algèbre aussi...), tandis que la seconde composition était constituée d'un problème long comportant une première partie géométrique et deux autres parties très algébriques sur des matrices réelles symétriques définies positives et des ellipsoïdes. Pour réussir cette seconde composition, il fallait être suffisamment entraîné en algèbre linéaire et bilinéaire, et connaître le précieux

[0] [annalescapesexterne2009a11] v1.06

théorème suivant lequel toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans le groupe orthogonal.

Ces derniers choix d'épreuves démontrent, si cela est nécessaire, qu'il faut s'entraîner aux écrits comme on le faisait les années précédentes. Il est toujours d'actualité de connaître les bases, de pouvoir rechercher des réponses avec succès, et de savoir les rédiger avec rigueur et précision.

Si l'apprentissage des bases reste incontournable, il semble même qu'on en demande plus. Pour s'en persuader, il suffit de lire les trois questions de cours de la première partie du problème 2 de la composition 1, suivies des trois premières questions de la seconde partie, et de remarquer que 80% de la seconde épreuve peut être facilement débitées en un certain nombre de questions-réponses courtes sur les fondamentaux à maîtriser. Est-ce une tendance lourde que nous retrouverons dans les prochaines années ?

Entraînement à la recherche, travail sur les fondamentaux, passage à l'acte dans la rédaction, voilà tout ce que l'on peut faire avec des annales corrigées. Que celles-ci permettent un entraînement fructueux !

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi
ce 20 décembre 2010.

Première partie

ECRITS 1

Chapitre 1

CAPES externe 2009, épreuve 1

1.1 Énoncé

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$.

– Si deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes, on notera

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n.$$

De même si f et g sont deux applications réelles définies au voisinage d'un point x_0 et équivalentes en x_0, on notera $f(x) \underset{x\to x_0}{\backsim} g(x)$. Quand le voisinage sera un voisinage à droite en x_0, on précisera $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\backsim} g(x)$.

– On rappelle que le *produit au sens de Cauchy* de deux séries (réelles ou complexes) $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série $\sum w_n$ où le terme général w_n est défini pour $n \geq 0$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. On rappelle aussi que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et l'on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Objectifs du problème

Ce sujet aborde une série de résultats et de propriétés relatifs à la formule de Stirling ainsi qu'aux polynômes et nombres dits de Bernoulli. Il se compose de quatre parties.
Dans la partie **I** on établit la formule de Stirling qui donne un équivalent simple de la suite $(n!)_n$. Ce travail utilise les intégrales de Wallis, qui sont étudiées au début de la partie. La fin de la partie **I** est une application des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling à l'étude du volume des boules de $\mathbb{R}^n$.
La partie **II** s'intéresse aux polynômes et nombres de Bernoulli. On y étudie certaines de leurs propriétés et l'on donne deux applications de cette étude. La première, arithmétique, s'intéresse au calcul des sommes du type $\sum_{k=0}^{N} k^p$. La deuxième est consacrée au développement en série entière de la fonction $\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}$.
Dans la partie **III** on introduit la fonction ζ de Riemann et l'on explicite ses valeurs prises sur les entiers positifs pairs au moyen des nombres de Bernoulli. Ce calcul permet, avec la formule de Stirling, d'expliciter un équivalent simple pour la suite des nombres de Bernoulli.
Dans la partie **IV** on revient à la formule de Stirling et l'on décrit une méthode pour obtenir un raffinement asymptotique de la formule.
Les parties de ce sujet ne sont pas indépendantes, chacune d'elles pouvant utiliser des résultats établis dans celles qui précèdent. Aussi pourra-t-on utiliser pour traiter certaines questions, les résultats établis dans les questions précédentes sans les démontrer. Il est toutefois conseillé aux candidats d'aborder linéairement ce sujet.

– I – Intégrales de Wallis et formule de Stirling

1. **Intégrales de Wallis**
   Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$$

   (Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variable).

(b) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
(Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde).

(c) À l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

(d) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

(e) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Indication. On pourra utiliser la question précédente en distinguant suivant la parité de l'entier n).

(f) Prouver que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} W_{n+1}$.
(Indication. On pourra utiliser la question **I.1.b.**).

(g) Montrer finalement que $W_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

2. **Formule de Stirling**
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_{n\geq 2}$ définie, pour $n \geq 2$ par :

$$v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}).$$

(a) Exprimer simplement v_n en fonction de n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$.

(b) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(c) En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\geq 0}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(formule de Stirling).

3. **Une autre application des intégrales de Wallis.**
Rappel sur les intégrales multiples et généralisation. (Ce rappel n'est utile que pour les sous-questions **I.3.a.** et **I.3.c.** de cette question **I.3.**)
Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geq 1$, une partie $A_n \subset \mathbb{R}^n$ sera dite continûment paramétrable si $n = 1$ et A_1 est un segment ou si $n \geq 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $f, g : A_{n-1} \to \mathbb{R}$ telles qu'en notant $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$:

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in A_{n-1} \text{ et } f\left(x'\right) \leq x_n \leq g\left(x'\right)\right\}$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $\varphi : A_n \to \mathbb{R}$, on définit l'intégrale multiple de φ sur A_n par la formule suivante :

$$\int\cdots\int_{A_n} \varphi(x)\, dx_n \cdots dx_1 = \int\cdots\int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x')}^{g(x')} \varphi(x)\, dx_n\right) dx_{n-1} \cdots dx_1$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n et de la fonction φ. Le volume de la partie A_n sera alors par définition, le réel $\int\cdots\int_{A_n} dx_n \cdots dx_1$.
On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathcal{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathcal{B}_n = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\right\}$$

On note V_n son volume.

(a) Montrer que, pour $n \geq 2$, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} \end{cases}$$

En déduire par récurrence sur $n \geq 1$, que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

(b) Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier.
Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin(t)$ que :

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}.$$

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a :

$$V_n = 2^k \prod_{i=1}^{k} W_i \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - \sum_{i=1}^{n-k} x_i^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k).

(d) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right) (2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geq 1$:

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

et pour $k \geq 0$:

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

(e) En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_{k\geq 1}$ et $(V_{2k+1})_{k\geq 0}$.

(f) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$.

(g) Montrer que, soit la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ soit croissante jusqu'au rang n_0 puis décroissante.

(Indication. On pourra calculer simplement le rapport $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ grâce à la question **I.3.d.** et utiliser les questions **I.1.b.** et **I.1.g.**)

(h) Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(i) Que vaut le rang n_0 de la question **I.3.g.** quand $R = 1$?

– II – Polynômes et nombres de Bernoulli

1. Définitions

(a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(X)\,dx = 0$.

(b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} B_0(X) = 1, \\ \forall n \geq 1,\ B_n' = nB_{n-1}, \\ \forall n \geq 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

On appelle $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de Bernoulli. Pour tout $n \geq 0$, on pose $b_n = B_n(0)$. La suite de réels $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Bernoulli.

(c) Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 2, 4$.

2. Premières propriétés

(a) Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geq 0$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

(c) Prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

où $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

(d) En déduire, pour $n \geq 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \cdots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

(e) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geq 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.

(f) Pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geq 0$ on a $C_n(x) = B_n(x)$.

(g) En déduire que :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1,\ b_{2n+1} = 0 \\ \forall n \geq 0,\ B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

3. **Étude des variations de B_n sur $[0,1]$**

(a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Établir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0,1]$, alors on a $\displaystyle\int_0^1 P(X)\,dx \neq 0$.

(b) Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que B_{2n} vérifie :
- $(-1)^n B_{2n}(0) < 0$
- $(-1)^n B_{2n}(1) < 0$
- $(-1)^n B_{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$
- la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

et que B_{2n+1} vérifie :
- $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$
- il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et $\beta_{2n+1} \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $\left[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}\right]$, puis strictement décroissante sur $\left[\beta_{2n+1}, 1\right]$.

(Indication. Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces six propriétés).

(c) En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

(d) Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n^*(X) = B_n(X) - b_n$. Pour $n \geq 1$, donner l'allure générale des courbes représentatives des fonctions B_{4n-2}^*, B_{4n-1}^*, B_{4n}^*, B_{4n+1}^* sur l'intervalle $[0,1]$.

4. **Une application arithmétique**

(a) Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

(b) Soient $p \geq 1$ et $N \geq 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question **II.4.a.** que :

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}$$

(c) Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel N, les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.

5. **Une application analytique**

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à 2π.
(Indication. On pourra, par exemple, déterminer les réels $t > 0$ pour lesquels la suite $\left(\frac{|b_n|}{n!} t^n\right)_n$ reste bornée. À cet effet, on pourra utiliser la formule de Stirling et admettre pour cette question que l'on a l'équivalent $b_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$. Ce résultat sera établi dans la question **III.2.e.** à venir).

(b) Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n\right)$$

et en déduire que pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n$$

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a :

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

(d) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n(x)}{n!} t^n$ est bien 2π.
(Indication. On pourra regarder dans $\mathbb{C}$ le comportement de la série entière au voisinage du cercle $|z| = 2\pi$).

– III – Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli

1. **Fonction ζ**
On appelle fonction ζ de Riemann (réelle) la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Soit $s > 0$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

En déduire que la nature (divergence ou convergence) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est la même que celle de la série $\sum \frac{1}{n^s}$.

(b) Donner le domaine de définition de ζ et prouver qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

(c) Montrer que $\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$ et en déduire $\lim_{s \to 1^+} \zeta(s)$.

(d) Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur son domaine de définition et que $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$.

(e) Montrer que, pour tout $s > 0$, la série $\theta(s) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge. Prouver que, pour tout $s > 1$, on a :

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)$$

2. **Calcul de $\zeta(2p)$**
Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on note :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2ik\pi x} dx$$

le k-ème coefficient de Fourier de la fonction f. On rappelle sans démonstration que, si f et g sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, alors on a :

$$\int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)} c_k(g)$$

(où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe).

(a) Calculer pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient $c_k(B_n)$.

(b) Soient $n, m \geq 1$ deux entiers. Montrer que :

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_{-k}(B_n) c_k(B_m) + c_k(B_n) c_{-k}(B_m)\right)$$

et en déduire la valeur de cette intégrale au moyen de valeurs de la fonction ζ.
(Indication. On distinguera les cas $n+m$ pair et $n+m$ impair).

(c) Pour $p \geq 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 B_1(x) B_{2p-1}(x)\, dx$ en intégrant par parties. En déduire que :

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1} \frac{b_{2p}}{2} \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$$

(d) Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

et des sommes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$$

(e) En utilisant les questions **III.1.d.** et **III.2.c.** ainsi que la formule de Stirling, montrer que :

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$$

3. **Application numérique**

   (a) Soient $s > 1$ et $N \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^s} \leq \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

   (b) Étant donné un réel $\varepsilon > 0$, expliciter un entier N_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^s}$ soit une approximation à ε près de $\zeta(s)$.

   (c) Déduire de ce qui précède, une approximation rationnelle A de π^6 à 10^{-2} près.

   (d) Majorer l'erreur commise en prenant $\sqrt[6]{A}$ comme approximation de π. Combien de décimales de π cette approximation permet-elle de donner ? Les donner.

– IV – Formule de Stirling généralisée

On considère la suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \geq 0$ par :

$$\Omega_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

On sait, d'après la partie I, qu'on a $\Omega_n = 1 + o(1)$. *On se propose ici de décrire une méthode pour obtenir un développement limité en* $\dfrac{1}{n}$ *de la suite* $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *autrement dit on veut raffiner la formule de Stirling.*

1. On se fixe un entier $N \geq 2$.

   (a) Montrer que :

$$\ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}\right) \ln(1+t)$ est développable en série entière en 0. Préciser son développement ainsi que le rayon de convergence de ce développement.

   (c) En déduire que :

$$\ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\zeta(k) - \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k}\right)$$

(d) Montrer que la série $\sum (-1)^{k+1} \dfrac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)$ est convergente. (Indication. On pourra utiliser le critère des séries alternées).

(e) En déduire que :

$$\ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

où $R_k(N) = \sum\limits_{n \geq N} \dfrac{1}{n^k}$.

2.

(a) Prouver que, pour tout $k \geq 2$ et tout $N \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k-1} \frac{1}{N^{k-1}} \leq R_k(N) \leq \frac{1}{k-1} \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}$$

(b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) = o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right)$$

3.

(a) Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{\ln(2\pi)}{2}$$

et que, pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\ln(\Omega_N) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

(b) Déduire de ce qui précède que si, les suites $(R_2(N))_{N \geq 1}$, $\cdots$, $(R_{p+1}(N))_{N \geq 1}$ possèdent des développements limités en $\dfrac{1}{N}$ à l'ordre p, alors la suite $(\ln(\Omega_N))_{N \geq 1}$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{p+1} (-1)^k \dfrac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \right)_{N \geq 1}$.

(c) Montrer que la suite $(\ln(\Omega_N))_{N \geq 1}$ possède un développement limité en $\dfrac{1}{N}$ à l'ordre 1. En déduire celui de la suite $(\Omega_N)_{N \geq 1}$ à cet ordre.

4.

(a) Montrer que, pour $N \geq 1$, on a :

$$R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

(b) En comparant cette série à l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, donner le développement limité de la suite $(R_2(N))_{N\geq 1}$ en $\dfrac{1}{N}$ à l'ordre 2. En déduire le développement limité de la suite $(\ln(\Omega_N))_{N\geq 1}$ puis de la suite $(\Omega_N)_{N\geq 1}$, en $\dfrac{1}{N}$ à l'ordre 2.

(c) En généralisant ce qui vient d'être fait, décrire brièvement les étapes à suivre pour trouver un développement limité de la suite $(\Omega_N)_{N\geq 1}$, en $\dfrac{1}{N}$ à un ordre donné.

1.2 Corrigé

– I – Intégrales de Wallis et formule de Stirling

1.

(a) Le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, donne :

$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

(b) Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \cos(x) < 1$, donc :

$$\cos^n(x) - \cos^{n+1}(x) = (1 - \cos(x))\cos^n(x) > 0$$

la fonction $x \mapsto \cos^n(x) - \cos^{n+1}(x)$ étant continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que :

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(x))\cos^n(x)\, dx > 0$$

Il en résulte que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

[0] Correction de J.-E. Rombaldi.

(c) Une intégration par parties donne pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\cos(x)\,dt \\ &= \left[\cos^{n+1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

et :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

(d) On procède par récurrence sur $p \geq 0$.
Pour $p = 0$, on a

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 1.$$

Supposant le résultat acquis au rang $p-1 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2(p-1)} = \frac{2p-1}{2p}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}\left((p-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p-1)\,2p}{(2p)^2}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}\left((p-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2^{2p-2}\left((p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} \\ &= \frac{(2p)^2}{(2p)(2p+1)}\frac{2^{2p-2}\left((p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} = \frac{2^{2p}\left(p!\right)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

(e) En posant $u_n = W_{n+1}W_n$, on a, pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = W_{n+2}W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

et par récurrence $u_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. En effet, pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$$

et supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 0$, on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1} u_{n-1} = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

On peut aussi vérifier ce résultat en discutant suivant la parité de n.
La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante minorée par 0 est convergente et en notant ℓ sa limite, de $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ on déduit en faisant tendre n vers l'infini que $\ell^2 = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

(f) Comme $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à valeurs strictement positives, on a $v_n = \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ pour tout $n \geq 0$. Et avec :

$$v_n v_{n+1} = \frac{W_{n+1}}{W_n} \frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} = \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$$

on déduit que :

$$v_n = \frac{1}{v_{n+1}} \frac{n+1}{n+2} > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

On a donc $1 - \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, ce qui signifie que $W_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} W_{n+1}$.

(g) Il en résulte que :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = W_n W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} W_n^2$$

et $W_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (on a $W_n > 0$ pour tout $n \geq 0$).
On retrouve le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

2.

(a) On a, pour $n \geq 2$:

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et le développement limité à l'ordre 2 ([1]) :

$$v_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(b) Il en résulte que la série $\sum v_n$ converge absolument (puisqu'on a aussi $|v_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).
Comme $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$, la série $\sum v_n$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ et cette dernière converge.
En notant ℓ sa limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K = e^\ell > 0$ et il en résulte que $n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} K\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$.

(c) On a alors :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{K\frac{\sqrt{2p}(2p)^{2p}}{e^{2p}}}{2^{2p}\left(K\frac{\sqrt{p}p^p}{e^p}\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{K}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}}\frac{\pi}{2}$$

et aussi $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ (question **I.1.g.**). On en déduit alors que $\frac{\pi}{\sqrt{2}K} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $K = \sqrt{2\pi}$.
On a donc :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n}.$$

3.

(a) On a :

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq R^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_n^2 \leq R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leq R^2 \\ -\sqrt{R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2} \end{cases}$$

[1] En fait l'énoncé demande un développement limité à l'ordre 2, donc il convient de pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 pour pouvoir remplacer dans l'expression de v_n, et obtenir $v_n = -1/(12n^2) + o(1/n^2)$.

Pour $n = 1$, $\mathcal{B}_1 = [-R, R]$ est continûment paramétrable et supposant que $\mathcal{B}_{n-1}$ est continûment paramétrable pour $n \geq 2$, l'équivalence précédente nous dit que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable puisque la fonction $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}$ est définie et continue sur $\mathcal{B}_{n-1}$.

(b) Le changement de variable $x = \lambda \sin(t)$, $dx = \lambda \cos(t)\, dt$ nous donne :

$$I_\lambda = 2\int_0^\lambda \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda^m \left(1 - \sin^2(t)\right)^{\frac{m}{2}} \lambda \cos(t)\, dt$$
$$= 2\lambda^{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}(t)\, dt = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}.$$

(c) Pour alléger les notations, on notera $X_j = (x_1, \cdots, x_j)$ un vecteur de $\mathbb{R}^j$, $dX_j = dx_j \cdots dx_1$ et $\int_{A_j} \varphi(X_j)\, dX_j$ une intégrale multiple sur $A_j \subset \mathbb{R}^j$.
Pour $n \geq 2$, $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable et son volume est donné par :

$$V_n = \int_{\mathcal{B}_n} dX_n$$
$$= \int_{\mathcal{B}_{n-1}} \left(\int_{-f_{n-1}(X_{n-1})}^{f_{n-1}(X_{n-1})} dx_n \right) dX_{n-1}$$

avec $f_{n-1}(X_{n-1}) = \sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}$ pour $X_{n-1} = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ dans $\mathcal{B}_{n-1}$, ce qui s'écrit aussi :

$$V_n = 2\int_{\mathcal{B}_{n-1}} \sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}\, dX_{n-1}$$
$$= 2W_1 \int_{\mathcal{B}_{n-1}} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} dX_{n-1}.$$

La formule est donc vraie pour $k = 1$.
Supposant le résultat acquis pour $1 \leq k \leq n-2$, en notant :

$$J_k = \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-k} x_k^2\right)^{\frac{k}{2}} dX_{n-k}$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n-k} &= \left\{ X_{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k} \mid \sum_{k=1}^{n-k} x_k^2 \leq R^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} X_{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k} \mid X_{n-k-1} \in \mathcal{B}_{n-k-1} \\ \text{et } -f_{n-k-1}\left(X_{n-k-1}\right) \leq x_{n-k} \leq f_{n-k-1}\left(X_{n-k-1}\right) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

où on a noté $f_j\left(X_j\right) = \sqrt{R^2 - \sum_{k=1}^{j} x_k^2}$ pour j compris entre 1 et n, on a :

$$\begin{aligned}J_k &= \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(\int_{-f_{n-k-1}(X_{n-k-1})}^{f_{n-k-1}(X_{n-k-1})} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-k} x_k^2 \right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \right) dX_{n-k-1} \\ &= \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(\int_{-f_{n-k-1}(X_{n-k-1})}^{f_{n-k-1}(X_{n-k-1})} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-k-1} x_k^2 - x_{n-k}^2 \right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \right) dX_{n-k-1} \\ &= \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(\int_{-f_{n-k-1}(X_{n-k-1})}^{f_{n-k-1}(X_{n-k-1})} \left(\left(f_{n-k-1}(X_{n-k-1})\right)^2 - x_{n-k}^2 \right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \right) dX_{n-k-1} \\ &= \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} 2\left(f_{n-(k+1)}\left(X_{n-(k+1)}\right)\right)^{k+1} W_{k+1} dX_{n-k-1}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}V_n &= 2^k \prod_{i=1}^{k} W_i \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-k} x_k^2 \right)^{\frac{k}{2}} dX_{n-k} \\ &= 2^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} W_i \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(f_{n-(k+1)}\left(X_{n-(k+1)}\right)\right)^{k+1} dX_{n-k-1} \\ &= 2^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} W_i \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(R^2 - \sum_{k=1}^{n-(k+1)} x_k^2 \right)^{\frac{k+1}{2}} dX_{n-k-1}\end{aligned}$$

soit la formule pour $k = 1$.
Cette formule est donc valable pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

(d) Pour $k = n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} V_n &= 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} W_i \int_{\mathcal{B}_1} \left(R^2 - x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \\ &= 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} W_i \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \\ &= 2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} W_i\right) 2R^n W_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right)(2R)^n \end{aligned}$$

Pour $n = 2k$, on a, en utilisant **I.1.e.** :

$$\begin{aligned} V_{2k} &= \left(W_1 W_2 W_3 W_4 \cdots W_{2k-1} W_{2k}\right)(2R)^{2k} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k} W_{2j-1} W_{2j}\right)(2R)^{2k} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{\pi}{2\,(2j)}\right)(2R)^{2k} \\ &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \end{aligned}$$

et pour $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned} V_{2k+1} &= \left(\prod_{i=1}^{2k+1} W_i\right)(2R)^{2k+1} = 2RV_{2k}W_{2k+1} \\ &= 2R\frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \frac{2^{2k}\,(k!)^2}{(2k+1)!} = 2^{2k+1}\frac{k!}{(2k+1)!}\pi^k R^{2k+1} \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 2, 3$, on a les formules classiques :

$$V_1 = 2R,\ V_2 = \pi R^2,\ V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

et pour $n = 4$:

$$V_4 = \frac{\pi^2}{2} R^4$$

(e) Avec $k! \underset{k\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{k}k^k}{e^k}$, on déduit que :

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \underset{k\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\pi e R^2\right)^k}{k^{k+\frac{1}{2}}}$$

et :

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1}\frac{k!}{(2k+1)!}\pi^k R^{2k+1}$$
$$\underset{k\to+\infty}{\backsim} 2^{2k+1}\frac{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{k}k^k}{e^k}}{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2k+1}(2k+1)^{2k+1}}{e^{2k+1}}}\pi^k R^{2k+1}$$
$$\underset{k\to+\infty}{\backsim} \frac{2eR}{\sqrt{2}}\left(4e\pi R^2\right)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{\sqrt{k}}{2k+1}\right)^{2k}$$

En écrivant que :

$$\left(\frac{\sqrt{k}}{2k+1}\right)^{2k} = \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{2k}$$

avec $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{2k} = \frac{1}{e}$, on déduit que :

$$V_{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\backsim} \frac{2eR}{\sqrt{2}}\left(4e\pi R^2\right)^k \frac{1}{2k+1}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{2k}$$
$$\underset{k\to+\infty}{\backsim} \frac{2R}{\sqrt{2}}\left(\frac{e\pi R^2}{k}\right)^k \frac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\backsim} R\frac{\left(\pi e R^2\right)^k}{\sqrt{2}k^{k+1}}$$

Et on constate que $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{V_{2k+1}}{V_{2k}} = 0$.

(f) Pour tout réel $\lambda > 0$, en notant $(\alpha_k)_{k\geq 1} = \left(\frac{\lambda^k}{k^k}\right)_{k\geq 1}$, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\lambda}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 0\times\frac{1}{e} = 0$$

et donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_k = 0$. De ce résultat, on déduit que :

$$\lim_{k\to+\infty} V_{2k} = \lim_{k\to+\infty} V_{2k+1} = 0$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

En fait, avec $V_n = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} W_i\right)(2R)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ (question **I.1.g.**), on déduit que :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2RW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ (point n'est besoin d'estimer les termes d'indices pairs et impairs).

(g) La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ étant strictement décroissante, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2RW_{n+1} \leq 2RW_2 = \frac{\pi R}{2}$$

Il en résulte que pour $0 < R \leq \frac{2}{\pi}$, la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Pour $R > \frac{2}{\pi}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = 0$, on déduit que $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ sera inférieur à 1 pour n assez grand et désignant par $n_0 \geq 1$ le plus petit entier tel que $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 1$, tenant compte du fait que la suite $\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 1} = (2RW_{n+1})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, on a :

$$\forall n > n_0,\ \frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{V_{n_0+1}}{V_{n_0}} \leq 1$$

donc $(V_n)_{n\geq n_0+1}$ est décroissante, et dans le cas où $n_0 \geq 2$:

$$\forall n \leq n_0 - 1,\ \frac{V_{n+1}}{V_n} \geq \frac{V_{n_0}}{V_{n_0-1}} > 1$$

donc $(V_n)_{1\leq n\leq n_0}$ est croissante.

(h) On a vu en **I.3.g.** que $(V_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour $0 < R \leq \frac{2}{\pi}$.

(i) Pour $R = 1$, on a $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2W_{n+1}$ et les calculs suivant :

$$2W_2 = \frac{\pi}{2} > 1,\ 2W_4 = \frac{3\pi}{8} > 1,\ 2W_5 = \frac{16}{15} > 1,\ 2W_6 = \frac{5\pi}{16} < 1$$

donnent $n_0 = 5$ (la suite $\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 1}$ étant strictement décroissante, il est inutile de calculer W_3).

– II – Polynômes et nombres de Bernoulli

1.

(a) La fonction polynomiale P admet une unique primitive polynomiale Q_0 telle que $Q_0(0) = 0$. Toutes les autres primitives de P sont les fonctions polynomiales $Q = Q_0 + \lambda$ où λ est un réel et l'égalité $\int_0^1 Q(X)\,dx = \int_0^1 Q_0(X)\,dx + a = 0$ est réalisée pour une unique valeur de a.

(b) On vérifie par récurrence sur $n \geq 0$ que les B_n sont uniquement déterminées et que ce sont des fonctions polynomiales. On peut aussi en préciser le degré et le coefficient dominant.
Pour $n = 0$, B_0 est bien un polynôme de degré 0 de coefficient dominant $\alpha_{0,0} = 1$.
En supposant que, pour $n \geq 0$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\alpha_{n,n} \neq 0$, soit $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} X^k$, on déduit de l'égalité $B'_{n+1} = (n+1) B_n$, que :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(X) &= (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1} + \alpha_{n+1,0}\right) \\ &= (n+1)\left(\alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j} X^j\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant $\alpha_{n+1,n+1} = \alpha_{n,n} \neq 0$. On a donc $\alpha_{n,n} = \alpha_{0,0} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction polynomiale $\varphi_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1}$ est la primitive de B_n nulle en 0 et $B_{n+1} = (n+1)\left(\varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,0}\right)$ où :

$$\alpha_{n+1,0} = -\int_0^1 \varphi_{n+1}(t)\,dt,$$

ce qui détermine de manière unique B_{n+1} et donne un algorithme de construction.

(c) On a $B_0(X) = 1$ et $b_0 = 1$.
En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(X) = X, \\ \alpha_{1,0} = -\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = -\int_0^1 t\,dt = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$B_1(X) = \varphi_1(X) + \alpha_{1,0} = X - \frac{1}{2},\ b_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \varphi_2(X) = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X, \\ \alpha_{2,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$B_2(X) = 2\left(\varphi_2(X) + \alpha_{2,0}\right) = X^2 - X + \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{cases} \varphi_3(X) = \dfrac{1}{3}X^3 - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{6}X, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6}\right) dt = 0 \end{cases}$$

$$B_3(X) = 3\varphi_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X,\ b_3 = 0.$$

$$\begin{cases} \varphi_4(X) = \dfrac{1}{4}X^4 - \dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{4}X^2, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4}\right) dt = -\frac{1}{120} \end{cases}$$

$$B_4(X) = 4\varphi_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30},\ b_4 = -\frac{1}{30}.$$

Les instructions Maple suivantes :

for n from 5 to 9 do bernoulli(n,x) ; bernoulli(n) ; od ;

permettent de calculer les polynômes et nombres de Bernoulli pour n compris entre 5 et 9. Les résultats sont les suivant :

n	$B_n(x)$	b_n
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	0
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$	0
8	$x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
9	$x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x$	0

2.

(a) On a déjà vu en **II.1.b.** que B_n est de degré n.

(b) Pour $n \geq 2$, on a :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0.$$

(c) Pour $n = 0$, le résultat est évident.
Pour $n \geq 1$, on a $B'_n = nB_{n-1}$ et par récurrence :

$$B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} \ (0 \leq k \leq n)$$

ce qui entraîne :

$$B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$$

pour $n \geq 1$ et $k = 0, 1, \cdots, n-2, n$. La formule de Taylor pour les polynômes nous donne alors :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

(d) Pour $n \geq 1$, on déduit de $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ avec :

$$B_n(t) = b_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

que :

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{(k+1)!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} b_{n-k}$$

et tenant compte de :

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} &= \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k} = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{n+1-j} b_j \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} b_j. \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que pour $n \geq 2$, de :

$$b_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

on déduit que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$ ou encore :

$$\binom{n}{1} b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$$

et :

$$b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+2} b_{n+1-(k+j)} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{n-1-j} b_{n-1-j} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

On retrouve les valeurs $b_5 = 0$ et $b_6 = \dfrac{1}{42}$ données par Maple.

(e) Comme pour $n \geq 1$, b_n est combinaison linéaire à coefficients rationnels de $b_0, \cdots, b_{n-1}$ et $b_0 = 1$, on en déduit que les b_n sont rationnels.
Et de $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$, on déduit que $B_n \in \mathbb{Q}_n[X]$ pour tout $n \geq 0$.

(f) On vérifie facilement que la suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (1.1), l'unicité d'une telle solution nous dit que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'égalité $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ se traduit en disant que la

fonction polynomiale $P_n : x \mapsto B_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est de la parité de n puisque :

$$P_n(-x) = B_n\left(\frac{1}{2}-x\right) = (-1)^n B_n\left(\frac{1}{2}+x\right) = (-1)^n P_n(x)$$

Il en résulte que le graphe de la fonction B_{2n} sur $[0,1]$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et que le graphe de la fonction B_{2n+1} sur $[0,1]$ est symétrique par rapport au point $\left(\frac{1}{2},0\right)$ (on a $B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = P_{2n+1}(0) = 0$ puisque P_{2n+1} est impaire).

(g) On a déjà vu que $B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour $n \geq 0$.
Avec $B'_{2n} = 2nB_{2n-1}$ pour $n \geq 1$, on déduit qu'on a aussi :

$$B'_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = 2nB_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pour $n \geq 2$ et $x = 0$, on a :

$$B_n(0) = C_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

ce qui entraîne pour $n \geq 1$, $B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$ et :

$$b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0.$$

Avec $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geq 2$, on déduit que pour tout $n \geq 1$ on a aussi $B_{2n+1}(1) = 0$ ($B_1(1) = \frac{1}{2}$).

3.

(a) Comme P est polynomiale non nulle et de signe constant sur $[0,1]$, c'est une fonction continue non identiquement nulle de signe constant sur $[0,1]$ (si $P = 0$ sur $[0,1]$, elle a alors une infinité de racines et c'est le polynôme nul) et donc $\int_0^1 P(X)\,dx \neq 0$.

(b) Il a déjà été montré que $(-1)^n B_{2n+1}(x) = 0$ pour $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ (il est vrai sans le $(-1)^n$).
Du fait que la fonction $P_n : x \mapsto B_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est de la parité de n, il

suffit de l'étudier sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ce qui revient à étudier B_n sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et avec $B_n(1)=B_n(0)$ pour $n\geq 2$, il s'agit en fait de montrer que, pour $n\geq 1$ on a :

- la fonction $D_n=(-1)^n B_{2n}$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ avec $D_n\left(\frac{1}{2}\right)>0$ et $D_n(1)<0$ (elle sera alors strictement croissante de $D_n(0)=D_n(1)<0$ à $D_n\left(\frac{1}{2}\right)>0$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ puisque $x\mapsto D_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est paire) ;
- il existe un réel β_{2n+1} dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$ tels que la fonction $E_n=(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement croissante de $E_n\left(\frac{1}{2}\right)=0$ à $E_n\left(\beta_{2n+1}\right)>0$ sur $\left[\frac{1}{2},\beta_{2n+1}\right]$, puis strictement décroissante de $E_n\left(\beta_{2n+1}\right)>0$ à $E_n(1)=0$ sur $\left[\beta_{2n+1},1\right]$ (elle sera alors strictement décroissante de $E_n(0)=0$ à $E_n(\alpha_{2n+1})<0$ sur $[0,\alpha_{2n+1}]$ puis strictement croissante de $E_n(\alpha_{2n+1})=-E_n\left(\beta_{2n+1}\right)<0$ à $E_n\left(\frac{1}{2}\right)=0$, où $\alpha_{2n+1}=1-\beta_{2n+1}\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ puisque $x\mapsto E_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est impaire).

Pour ce faire, on procède par récurrence sur $n\geq 1$.
Pour $n=1$, on a :

$$\begin{aligned}
D_1(x)&=-B_2(x)=-x^2+x-\frac{1}{6},\\
D_1'(x)&=-2B_1(x)=-2x+1\\
E_1(x)&=-B_3(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x,\\
E_1'(x)&=-3B_2(x)=3D_1(x)
\end{aligned}$$

donc D_1 est strictement décroissante de $D_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}>0$ à $D_1(1)=-\frac{1}{6}<0$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Les zéros de D_1 sont $\alpha_3=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $\beta_3=1-\alpha_3=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ et E_1 est strictement croissante de

$E_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ à $E_1(\beta_3) = \frac{\sqrt{3}}{36} > 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right]$, puis strictement décroissante de $E_1(\beta_3)$ à $E_1(1) = 0$ sur $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right]$.
Sur la figure 1.1 nous avons tracé les graphes de $D_1 = -B_2$ et $E_1 = -B_3$. Supposant les résultats acquis jusqu'à l'ordre $n \geq 1$.

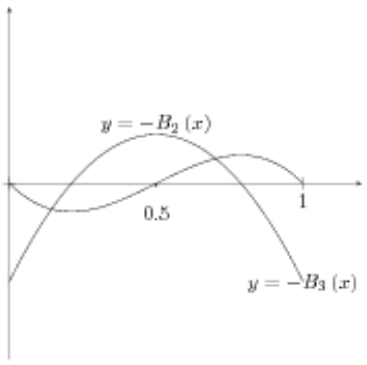


FIG. 1.1 – $y = -B_2(x)$ et $y = -B_3(x)$

Avec $B'_{2n+2} = (2n+2) B_{2n+1} = (2n+2) E_n$, on a :

$$D'_{n+1} = (-1)^{n+1} B'_{2n+2} = -(2n+2) E_n < 0$$

sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (E_n est strictement croissante de $E_n(0) = 0$ à $E_n\left(\beta_{2n+1}\right) > 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, \beta_{2n+1}\right]$, puis strictement décroissante de $E_n\left(\beta_{2n+1}\right) > 0$ à $E_n(1) = 0$ sur $\left[\beta_{2n+1}, 1\right]$, donc $E_n > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$), donc D_{n+1} est strictement décroissante $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par symétrie.
Si $D_{n+1}(0) = D_{n+1}(1) \geq 0$, on aura $D_{n+1}(x) > 0$ sur $]0,1[$ vu les variations de D_{n+1} et $\int_0^1 D_{n+1}(x)\,dx > 0$, ce qui est contradiction avec $\int_0^1 D_{n+1}(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_{2n+2}(x)\,dx = 0$. On a donc $D_{n+1}(0) = D_{n+1}(1) < 0$.

De même, si $D_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$, on a alors $D_{n+1} < 0$ sur $[0,1]$ éventuellement privé de $\frac{1}{2}$ et $\int_0^1 D_{n+1}(x)\,dx < 0$, ce qui n'est pas possible. On a donc $D_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.
Le tableau de variations de la fonction :

$$\begin{aligned} E'_{n+1} &= (-1)^{n+1} B'_{2n+3} \\ &= (-1)^{n+1} (2n+3) B_{2n+2} = -(2n+3) D_{n+1} \end{aligned}$$

sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ nous dit qu'elle s'annule en un unique point β_{2n+3} dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$ avec $E'_n(x) < E'_n\left(\beta_{2n+3}\right) = 0$ sur $\left[\frac{1}{2},\beta_{2n+3}\right[$ et $E'_n(x) > E'_n\left(\beta_{2n+3}\right) = 0$ sur $\left]\beta_{2n+3},1\right]$ (puisque D_{n+1} est strictement décroissante $\left[\frac{1}{2},1\right]$), ce qui signifie que E_{n+1} est strictement croissante de $E_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ à $E_{n+1}\left(\beta_{2n+3}\right) > 0$ sur $\left[\frac{1}{2},\beta_{2n+3}\right]$, puis strictement décroissante de $E_{n+1}\left(\beta_{2n+3}\right) > 0$ à $E_{n+1}(1) = 0$ sur $\left[\beta_{2n+3},1\right]$. La symétrie nous donne le reste.
Sur la figure 1.2 nous avons tracé les graphes de $D_2 = B_4$ et $E_2 = B_5$.

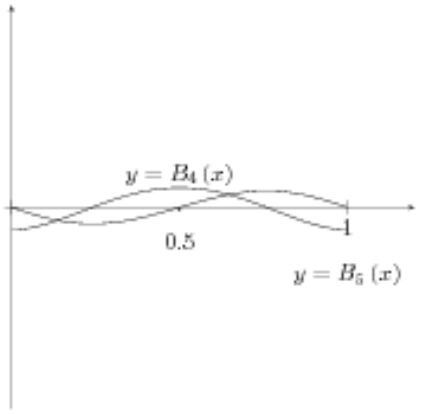


FIG. 1.2 – $y = B_4(x)$ et $y = B_5(x)$

(c) De $(-1)^n B_{2n}(0) = (-1)^n b_{2n} < 0$ pour $n \geq 1$, on déduit que b_{2n} est du signe de $(-1)^{n+1}$. Pour $n = 0$, on a $b_0 = 1 > 0$.

(d) La figure 1.3 donne l'allure des graphes de $B^*_{2(2n-1)}$ et $B^*_{2(2n-1)+1}$ et la figure 1.4 donne l'allure des graphes de $B^*_{2(2n)}$ et $B^*_{2(2n)+1}$ sur $[0,1]$.

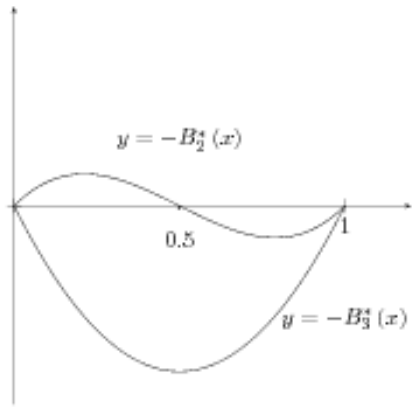


FIG. 1.3 – $y = B_2^*(x)$ et $y = B_3^*(x)$

4.

(a) Pour $n = 1$, on a $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ et :

$$B_1(x+1) - B_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0.$$

En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 1$, on peut écrire, pour tout réel x, que :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= \int_x^{x+1} B'_{n+1}(t)\,dt = (n+1)\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt \\ &= (n+1)\left(\int_0^{x+1} B_n(t)\,dt - \int_0^x B_n(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{x+1} B_n(t)\,dt &= \int_0^1 B_n(t)\,dt + \int_1^{x+1} B_n(t)\,dt \\ &= \int_1^{x+1} B_n(t)\,dt = \int_0^x B_n(u+1)\,du \end{aligned}$$

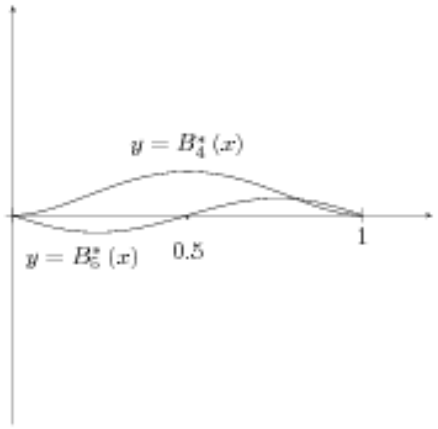


FIG. 1.4 – $y = B_4^* (x)$ et $y = B_5^* (x)$

ce qui donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{n+1} &= \int_0^x (B_n(t+1) - B_n(t))\, dt \\ &= \int_0^x nt^{n-1} dt = x^n.\end{aligned}$$

(b) Pour tout entier k compris entre 0 et N, on a :

$$B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = (p+1)\, k^p$$

et en sommant toutes ces égalités, il vient :

$$\begin{aligned}B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0) &= \sum_{k=0}^{N} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) \\ &= (p+1) \sum_{k=0}^{N} k^p\end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{N} k^p = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}.$$

(c) Pour $p = 1, 2, 3$, on a :

$$B_2(N+1) - b_2 = (N+1)^2 - (N+1) = N(N+1)$$

$$B_3(N+1) - b_3 = (N+1)^3 - \frac{3}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{2}(N+1)$$
$$= \frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)$$

$B_4(N+1) - b_4 = (N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2 = N^2(N+1)^2$

et :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{N} k\right)^2 \end{cases}$$

5.

(a) Avec $n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$ et $|b_{2n}| \underset{n\to+\infty}{\backsim} 4\sqrt{\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$ on déduit que :

$$\frac{|b_{2n}|}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{2n}}{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}4\sqrt{\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} = a_n = \frac{2}{(2\pi)^{2n}}$$

et avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(2\pi)^2}$, on déduit que la série entière complexe $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $(2\pi)^2$, donc $\sum \frac{b_{2n}}{(2n)!}z^n$ a aussi un rayon de convergence égal à $(2\pi)^2$, ce qui entraîne que le rayon de convergence de $\sum \frac{b_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$ est égal à 2π et compte tenu du fait que $b_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$, on déduit que le rayon de convergence de $\sum \frac{b_n}{n!}z^n$ vaut 2π.

(b) Le rayon de convergence de la série entière complexe $\sum \frac{z^n}{n!}$ étant infini, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$, en notant $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

avec :

$$c_0 = a_0 b_0 = 0$$

et pour $n \geq 1$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

ce qui donne $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 2$ puisque $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$ pour $n \geq 2$ (question **II.2.d.**). On a donc, pour $|z| < 2\pi$:

$$(e^z - 1) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n \right) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n \right) = z$$

et :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$$

(c) La série entière complexe $\sum \frac{x^n}{n!} z^n$ ayant, pour tout réel x, un rayon de convergence infini, l'utilisation du produit de Cauchy nous donne, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$:

$$\frac{z e^{xz}}{e^z - 1} = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x)\, z^n$$

avec, pour $n \geq 0$:

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k = B_n(x)$$

(question **II.2.c.**).

(d) La question précédente nous dit que, pour tout réel x, le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 2π. Si $R > 2\pi$, en posant $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x)\, z^n$ pour $|z| < R$, la fonction $t \mapsto \varphi(i\theta)$ est continue sur $]-R, R[$, donc en

particulier en 2π et comme cette fonction coïncide avec $\dfrac{i\theta e^{xi\theta}}{e^{i\theta}-1}$ sur $]-2\pi, 2\pi[$, il en résulte que :

$$\lim_{\theta\to 2\pi^-}\left|\frac{i\theta e^{xi\theta}}{e^{i\theta}-1}\right| = \lim_{\theta\to 2\pi^-}\frac{\theta}{|e^{i\theta}-1|} = \lim_{\theta\to 2\pi^-}|\varphi(i\theta)| \in \mathbb{R}$$

ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{\theta\to 2\pi^-}\dfrac{\theta}{|e^{i\theta}-1|} = +\infty$. On a donc $R = 2\pi$.

– III – Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli

1.

(a) La fonction $x \to \dfrac{1}{x^s}$ étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$ pour $s > 0$, on a pour tout $t \in]k, k+1[$:

$$\frac{1}{x^s} - \frac{1}{k^s} < 0 < \frac{1}{x^s} - \frac{1}{(k+1)^s}$$

et en conséquence :

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x^s} - \frac{1}{k^s}\right)dx < 0 < \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)dx$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s} \tag{1.2}$$

En désignant, pour tout entier $n \geq 1$, par $S_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^s}$ la n-ème somme partielle de la série $\sum\dfrac{1}{n^s}$, on en déduit que :

$$S_{n+1}(s) - 1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^s} \tag{1.3}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^s} = \int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} = S_n(s). \tag{1.4}$$

les suites $(S_n(s))_{n\geq 1}$ et $\left(\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right)_{n\geq 1}$ étant strictement croissantes (puisque la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^s}$ est à valeurs strictement positives).

La série $\sum\frac{1}{n^s}$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n(s))_{n\geq 1}$ est majorée, ce qui équivaut, compte tenu de l'encadrement précédent, à dire que la suite $\left(\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right)_{n\geq 1}$ est majorée, encore équivalent à dire que cette suite converge, ce qui revient à dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ converge. En définitive la série $\sum\frac{1}{n^s}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ sont de même nature.

(b) Avec :

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s}=\begin{cases}\ln(n+1)\ \text{ si } s=1\\ \dfrac{1}{s-1}\left(1-\dfrac{1}{n^{s-1}}\right)\ \text{ si } s\neq 1\end{cases}$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s}=\begin{cases}+\infty \text{ si } s\leq 1\\ \dfrac{1}{s-1}\text{ si } s>1\end{cases}$$

et la série $\sum\frac{1}{n^s}$ converge si, et seulement si, $s>1$.

Pour $1<s<s'$, on a $\frac{1}{n^s}-\frac{1}{n^{s\prime}}>0$ pour tout $n\geq 2$ (la fonction $s\mapsto\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\exp(s\ln(n))}$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ pour $n\geq 2$) et :

$$\zeta(s)-\zeta(s')=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{n^{s\prime}}\right)>\frac{1}{2^s}-\frac{1}{2^{s'}}>0$$

Donc ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

(c) Faisant tendre n vers l'infini, pour $s>1$, dans (1.3), on obtient :

$$\zeta(s)-1\leq\frac{1}{s-1}\leq\zeta(s)$$

ou encore :

$$1\leq(s-1)\zeta(s)\leq s$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{s\to 1^+}(s-1)\,\zeta(s)=1$ et signifie que :

$$\zeta(s)\underset{s\to 1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{s\to 1^+}\zeta(s)=\lim\limits_{s\to 1^+}\dfrac{1}{s-1}=+\infty$.

(d) Avec $0<\dfrac{1}{n^s}\leq\dfrac{1}{n^a}$ pour tout $s\geq a$ et $\sum\dfrac{1}{n^s}<+\infty$ pour $a>1$, on déduit que $\sum\dfrac{1}{n^s}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $[a,+\infty[$. Comme chacune des fonctions $s\mapsto\dfrac{1}{n^s}$ est continue sur $[a,+\infty[$, on en déduit que ζ est continue sur $[a,+\infty[$. Le réel étant a quelconque dans $]1,+\infty[$, on en déduit que ζ est continue sur cet intervalle.
La convergence de la suite de fonctions $(S_n(s))_{n\geq 1}$ étant uniforme sur $[2,+\infty[$, on a :

$$\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)=\lim_{s\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}S_n(s)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{s\to+\infty}S_n(s)=1$$

On peut aussi utiliser l'encadrement :

$$0<\zeta(s)-1\leq\frac{1}{s-1}$$

pour $s>1$ (question **III.1.c.**) qui donne $\lim\limits_{s\to+\infty}(\zeta(s)-1)=0$.

(e) Pour $s>0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc le théorème des séries alternées nous dit que la série $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ est convergente. Pour $s\leq 0$ la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0, donc le domaine de définition de θ est $\mathbb{R}^{+,*}$.
Pour $s>1$ et $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}T_{2n+1}(s)&=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{2j+1}}{(2j)^s}+\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{2j+2}}{(2j+1)^s}\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(2j+1)^s}-\frac{1}{2^s}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^s}\end{aligned}$$

et :

$$S_{2n+1}(s)=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^s}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(2j+1)^s}+\frac{1}{2^s}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^s}$$

ce qui donne :

$$S_{2n+1}(s) - T_{2n+1}(s) = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^s} = \frac{1}{2^{s-1}} S_n(s)$$

et faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\zeta(s) - \theta(s) = \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s)$, ce qui donne $\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$.

2.

(a) Pour $n = 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_k(B_0) = \int_0^1 e^{-2ik\pi x} dx = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$ et $k = 0$, on a :

$$c_0(B_n) = \int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$$

Pour $n \geq 2$ et $k \neq 0$, une intégration par parties donne, en tenant compte de $B_n(0) = B_n(1)$ (vrai pour $n \geq 2$) et $B_n' = nB_{n-1}$:

$$\begin{aligned} c_k(B_n) &= \int_0^1 B_n(x)\, e^{-2ik\pi x} dx \\ &= \left[-B_n(x) \frac{e^{-2ik\pi x}}{2ik\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi} \int_0^1 B_n'(x)\, e^{-2ik\pi x} dx \\ &= \frac{n}{2ik\pi} \int_0^1 B_{n-1}(x)\, e^{-2ik\pi x} dx = \frac{n}{2ik\pi} c_k(B_{n-1}) \end{aligned}$$

et avec :

$$\begin{aligned} c_k(B_1) &= \left[-B_1(x) \frac{e^{-2ik\pi x}}{2ik\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi} \int_0^1 B_1'(x)\, e^{-2ik\pi x} dx \\ &= \frac{1}{2ik\pi}(B_1(0) - B_1(1)) + \frac{1}{2ik\pi} \int_0^1 e^{-2ik\pi x} dx = -\frac{1}{2ik\pi} \end{aligned}$$

on déduit par récurrence sur $n \geq 1$, à $k \neq 0$ fixé, que :

$$c_k(B_n) = -\frac{n!}{(2ik\pi)^n}$$

On peut remarquer que, pour $k \geq 1$, on a :

$$c_{-k}(B_n) = -\frac{n!}{(-2ik\pi)^n} = \overline{c_k(B_n)}$$

(ce qui est normal, puisque la fonction B_n est à valeurs réelles).

(b) Le changement de variable $x = \dfrac{1}{2} + t$ nous donne :

$$\int_0^1 B_n(x)\, B_m(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_n(t)\, P_m(t)\, dx$$

la fonction polynomiale $P_n : t \mapsto B_n\left(t + \dfrac{1}{2}\right)$ étant de la parité de n (question **II.2.f.**), ce qui permet de déduire que :

$$\int_0^1 B_n(x)\, B_m(x)\, dx = 0 \text{ si } n+m \text{ est impair.}$$

Les fonctions B_n étant à valeurs réelles, le théorème de Parseval nous dit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)\, B_m(x)\, dx &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{c_k(B_n)} c_k(B_m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k}(B_n)\, c_k(B_m) \\
&= c_0(B_n)\, c_0(B_m) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{-k}(B_n)\, c_k(B_m) \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(B_n)\, c_k(B_m) \\
&= c_0(B_n)\, c_0(B_m) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(B_n)\, c_{-k}(B_m) \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(B_n)\, c_k(B_m)
\end{aligned}$$

et avec $c_0(B_n) = c_0(B_m)$ pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, on déduit que :

$$\int_0^1 B_n(x)\, B_m(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_{-k}(B_n)\, c_k(B_m) + c_k(B_n)\, c_{-k}(B_m)\right)$$

soit :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)\, B_m(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\tfrac{n!}{(-2ik\pi)^n} \tfrac{m!}{(2ik\pi)^m} + \tfrac{n!}{(2ik\pi)^n} \tfrac{m!}{(-2ik\pi)^m}\right) \\
&= \frac{n!m!}{(2i\pi)^{n+m}} \left((-1)^n + (-1)^m\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{n+m}} \\
&= \frac{n!m!\,(-1)^n}{(2i\pi)^{n+m}} \left(1 + (-1)^{n+m}\right) \zeta(n+m)
\end{aligned}$$

On retrouve le fait que $\int_0^1 B_n(x)\,B_m(x)\,dx = 0$ pour $n+m$ impair (i. e. pour n et m de parité différente) et pour $n+m$ pair, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n(x)\,B_m(x)\,dx &= 2\frac{n!m!\,(-1)^n}{(2i\pi)^{n+m}}\zeta(n+m)\\ &= 2\frac{n!m!\,(-1)^{n+\frac{n+m}{2}}}{(2\pi)^{n+m}}\zeta(n+m)\end{aligned}$$

(c) Pour $n=1$, $m=2p-1$ avec $p\geq 1$, on a :

$$\int_0^1 B_1(x)\,B_{2p-1}(x)\,dx = 2\frac{(2p-1)!\,(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}}\zeta(2p)$$

et une intégration par parties donne, tenant compte de $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$, $B_{2p}(1) = B_{2p}(0) = b_{2p}$ et $\int_0^1 B_{2p}(x)\,dx = 0$ pour p :

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_1(x)\,B_{2p-1}(x)\,dx &= \left[B_1(x)\,\frac{B_{2p}(x)}{2p}\right]_0^1 - \frac{1}{2p}\int_0^1 B_1'(x)\,B_{2p}(x)\,dx\\ &= \frac{b_{2p}}{2p}\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\,\frac{b_{2p}}{2}\,\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$$

(d) On a en particulier, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_6 = \frac{1}{42}$ et :

$$\zeta(2) = \frac{b_2}{2}\frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{\pi^2}{6},\ \theta(2) = \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\zeta(2)+\theta(2)}{2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\zeta(4) = -\frac{b_4}{2}\frac{(2\pi)^4}{4!} = \frac{\pi^4}{90},\ \theta(4) = \frac{7\zeta(4)}{8} = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\zeta(4)+\theta(4)}{2} = \frac{15}{16}\zeta(4) = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\zeta(6) = \frac{b_6}{2}\frac{(2\pi)^6}{6!} = \frac{\pi^6}{945},\ \theta(6) = \frac{31\zeta(6)}{32} = \frac{31\pi^6}{30\,240}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\zeta(6)+\theta(6)}{2} = \frac{63}{64}\zeta(6) = \frac{\pi^6}{960}$$

C'est bien ce que donne Maple avec les instructions :
sum('(-1)^k/k^6', 'k'=1..infinity) ; et sum('1/(2*k+1)^6', 'k'=0..infinity) ;

(e) Avec $\lim_{p\to+\infty}\zeta(2p) = 1$ et la formule de Stirling, on déduit que :

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2(-1)^{p+1}\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2(-1)^{p+1}\frac{(2p)^{2p}\sqrt{4\pi p}}{e^{2p}(2\pi)^{2p}}$$

ou encore :

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 4(-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{\pi p}$$

3.

(a) De (1.2) on déduit que, pour $s > 1$ et $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{k\geq N}\frac{1}{(k+1)^s} \leq \sum_{k\geq N}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^s} = \int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1}$$

soit :

$$\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^s} \leq \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

(b) On aura $0 < \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^s} < \varepsilon$ si $\frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}} < \varepsilon$, ce qui équivaut à $N^{s-1} > \frac{1}{\varepsilon(s-1)}$ ou encore à $N > \frac{1}{(\varepsilon(s-1))^{\frac{1}{s-1}}}$.
En notant $[x]$ la partie entière d'un réel x, pour :

$$N_0 = \left[\frac{1}{(\varepsilon(s-1))^{\frac{1}{s-1}}}\right] + 1$$

$\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^s}$ est une approximation à ε près de $\zeta(s)$.

(c) L'encadrement $0 < \pi^6 - A < 10^{-2}$ équivaut à :

$$0 < \frac{1}{945}\left(\pi^6 - A\right) = \zeta(6) - \frac{A}{945} < \varepsilon = \frac{10^{-2}}{945} \backsimeq 1.058\,2 \times 10^{-5}$$

ce qui sera réalisé pour $\dfrac{A}{945} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^6}$. Avec les notations qui précèdent, on a :

$$\frac{1}{(\varepsilon(s-1))^{\frac{1}{s-1}}} \backsimeq \frac{1}{(1.058\,2 \times 10^{-5} \times 5)^{\frac{1}{5}}} \backsimeq 7.166\,3$$

et $N_0 = 8$ convient, ce qui donne :

$$A = 945 \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^6} = \frac{357\,389\,058\,474\,664\,049}{371\,743\,948\,800\,000} \backsimeq 961.3850061$$

comme approximation rationnelle de π^6 à 10^{-2} près.

(d) De $0 < \pi^6 - A < 10^{-2}$, on déduit que $A < \pi^6 < A + 10^{-2}$ et :

$$0 < \pi - \sqrt[6]{A} < \sqrt[6]{A + 10^{-2}} - \sqrt[6]{A}$$

et $\sqrt[6]{A}$ est une approximation de π à $\varepsilon = \sqrt[6]{A + 10^{-2}} - \sqrt[6]{A}$ près, ce qui donne ici :

$$\varepsilon \backsimeq \sqrt[6]{961.3850061 + 10^{-2}} - \sqrt[6]{961.3850061} \backsimeq 0.5446\,3 \times 10^{-5} < 10^{-5}$$

et on a 5 décimales de π :

$$\sqrt[6]{A} \backsimeq \sqrt[6]{961.39} \backsimeq 3.141590373.$$

– IV – Formule de Stirling généralisée

1.

(a) Pour $n \geq 0$, on a :

$$\frac{\Omega_{n+1}}{\Omega_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

et pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \ln(\Omega_1) + \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(\Omega_{n+1}) - \ln(\Omega_n)) \\ &= \ln(\Omega_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{\Omega_{n+1}}{\Omega_n}\right) \\ &= \ln(\Omega_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

(b) On sait que la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est développable en série entière en 0 avec :

$$\forall t \in]-1,1[\,,\ \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$$

ce qui entraîne, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)} t^n \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} t^k\end{aligned}$$

et le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 (le coefficient de t^n est une fonction rationnelle de n).
On rappelle qui si $\sum a_n t^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence fini $R > 0$ telle que la série $\sum a_n R^n$ soit convergente, en notant $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ la somme de cette série pour $t \in]-R, R[$, on a :

$$\lim_{t \to R^-} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

et f peut être prolongée par continuité en R en posant
$f(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Ici, en utilisant le théorème des séries alternées, on vérifie que la série $\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)}t^k$ est convergente pour $t=1$ (la dérivée de $x \mapsto \frac{x-1}{2x(x+1)}$ est $-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2-2}{x^2(x+1)^2}$, donc $\left(\frac{k-1}{2k(k+1)}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante) et le développement limité est valable sur $t \in]-1,1]$.

(c) Pour $n \geq 1$, on a $t = \frac{1}{n} \in]-1,1]$ et le développement limité précédent nous donne :

$$1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{n^k}$$

et en conséquence, pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\Omega_N}{\Omega_1}\right) &= \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\zeta(k)-\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^k}\right)\end{aligned}$$

(d) Les suites $(\zeta(k))_{k\geq 2}$ et $\left(\frac{k-1}{2k(k+1)}\right)_{k\geq 3}$ étant à valeurs strictement positives et décroissantes, il en est de même de $\left(\zeta(k)\frac{k-1}{2k(k+1)}\right)_{k\geq 3}$ et avec $\lim_{k\to+\infty}\zeta(k)\frac{k-1}{2k(k+1)} = 1\times 0 = 0$, on déduit du théorème des séries alternées que la série $\sum(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k)$ est convergente.

(e) Des questions précédentes, on déduit que la série de terme général $(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)$ est aussi convergente et que :

$$\ln\left(\frac{\Omega_N}{\Omega_1}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)$$

2.

(a) De (1.2) on déduit que, pour $k \geq 2$ et $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n\geq N} \frac{1}{(n+1)^k} \leq \sum_{n\geq N} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^k} = \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{N^{1-k}}{k-1} \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^k}$$

soit :

$$R_k(N) - \frac{1}{N^k} \leq \frac{1}{k-1}\frac{1}{N^{k-1}} \leq R_k(N)$$

ou encore :

$$\frac{1}{k-1}\frac{1}{N^{k-1}} \leq R_k(N) \leq \frac{1}{k-1}\frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}$$

On a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{k-1}R_k(N) = \dfrac{1}{k-1}$ et :

$$R_k(N) = \frac{1}{k-1}\frac{1}{N^{k-1}} + o\left(\frac{1}{N^{k-1}}\right).$$

(b) En notant :

$$S_p(N) = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

il s'agit de montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{p-2}S_p(N) = 0$ pour tout $p \geq 2$ en interprétant $o\left(\dfrac{1}{N^{p-2}}\right)$ comme $\underset{N\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{N^{p-2}}\right)$.
L'encadrement précédent nous donne :

$$U_p(N) \leq S_p(N) \leq V_p(N)$$

où on a noté :

$$U_p(N) = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k(k+1)} \frac{1}{N^{k-1}}$$

et :

$$\begin{aligned} V_p(N) &= \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k(k+1)} \left(\frac{1}{N^{k-1}} + \frac{k-1}{N^k}\right) \\ &= U_p(N) + \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \frac{1}{N^k} \\ &= U_p(N) + W_p(N) \end{aligned}$$

Avec :

$$|U_p(N)| \leq \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{N^{k-1}} \leq \frac{1}{N^{p-1}} \frac{1}{1-\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N^{p-1}}$$

et :

$$|W_p(N)| \leq \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{N^k} = \frac{1}{N^p} \frac{1}{1-\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N^P}$$

on déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{p-2}U_p(N) = \lim\limits_{N\to+\infty} N^{p-2}V_p(N) = 0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{p-2}S_p(N) = 0$.

3.

(a) On a, pour tout $N \geq 2$:

$$\ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - S_2(N)$$

avec $\lim\limits_{N\to+\infty} S_p(N) = 0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(\Omega_N) = \ln(1) = 0$ (on rappelle que $\lim\limits_{N\to+\infty} \Omega_N = 1$), ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) &= -\ln(\Omega_1) = -\ln\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{2}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{\ln(2\pi)}{2}$$

Il en résulte que :

$$\ln(\Omega_N) = -S_2(N) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

(b) Pour $p \geq 2$ et $N \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) - S_{p+2}(N) \\ &= \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + o\left(\frac{1}{N^p}\right)\end{aligned}$$

et $\ln(\Omega_N)$ admet un développement asymptotique en $\frac{1}{N}$ à l'ordre p.

(c) En **IV.2.a.** on a vu que $R_2(N) = \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$. Il en résulte que :

$$\ln(\Omega_N) = \frac{1}{12} R_2(N) + o\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{12}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

et :

$$\Omega_N = \exp\left(\frac{1}{12}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

4.

(a) On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

avec $a = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$, $c = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2} = 1$ et $b+c = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

et donne pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

et :

$$\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = R_2(N) - \frac{1}{N}$$

(b) En notant $\rho_N = \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2(n+1)}$, les encadrements :

$$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2(x+1)} \leq \frac{1}{n^2(n+1)}$$

donnent :

$$\rho_N - \frac{1}{N^2(N+1)} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} \leq \rho_N$$

et :

$$\rho_N = R_2(N) - \frac{1}{N} = \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} &= \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_N^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{N} - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = \frac{1}{N} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$R_2(N) = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

et avec $R_3(N) = \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$ (question **IV.2.a.**), on déduit que :

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \frac{1}{12}R_2(N) - \frac{1}{12}R_3(N) + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) - \frac{1}{24}\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &= \frac{1}{12}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\Omega_N &= \exp\left(\frac{1}{12}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{N} + \frac{1}{2}\frac{1}{(12)^2}\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{N} + \frac{1}{288}\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\end{aligned}$$

(c) Pour continuer, on écrit que :

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \sum_{k=2}^{4} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + o\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ &= \frac{1}{12}R_2(N) - \frac{1}{12}R_3(N) + \frac{3}{40}R_4(N) + o\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned}$$

avec $R_4(N) = \frac{1}{3}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)$, ce qui donne :

$$\ln(\Omega_N) = \frac{1}{12}R_2(N) - \frac{1}{12}R_3(N) + \frac{1}{40}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

et il s'agit de déterminer les développements asymptotiques à l'ordre 3 de $R_2(N)$ et $R_3(N)$.
Pour $R_2(N)$, on cherche d'abord des coefficients réels tels que :

$$\frac{1}{x^2} + \alpha\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) + \beta\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x+1)^3}$$

Ces coefficients sont déterminés par :

$$\frac{(1-\alpha)x^2 + (2-\alpha-2\beta)x + 1 - \beta}{x^2(x+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x+1)^3}$$

soit par :

$$x(x+1)\left((1-\alpha)x^2 + (2-\alpha-2\beta)x + 1 - \beta\right) = ax^2+bx+c$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha = 1,\ \beta = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2},\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^3(n+1)^3} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

et en faisant la somme :

$$R_2(N) - \frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

En notant $\rho_N = \sum_{n\geq N}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$, les encadrements :

$$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2(x+1)^2} \leq \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

donnent :

$$\rho_N - \frac{1}{N^2\left(N+1\right)^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(x+1\right)^2} \leq \rho_N$$

et :

$$\rho_N = \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(x+1\right)^2} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_N^{+\infty}\tfrac{dx}{x^2(x+1)^2} &= \int_N^{+\infty}\tfrac{dx}{x^2} + \int_N^{+\infty}\left(\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{1}{x}\right)dx + \tfrac{1}{2}\int_N^{+\infty}\left(\tfrac{1}{(x+1)^2}-\tfrac{1}{x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^2} + \int_{N+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{N}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \\
&= \tfrac{1}{2N}\left(2-\tfrac{1}{N}+\tfrac{1}{N^2}\right) - \left(\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{2N^2}+\tfrac{1}{3N^3}\right) + o\left(\tfrac{1}{N^3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
R_2\left(N\right) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}\rho_N \\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(x+1\right)^2} + o\left(\frac{1}{N^3}\right) \\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)
\end{aligned}$$

Pour $R_3\left(N\right)$, on cherche des coefficients réels tels que :

$$\frac{1}{x^3} + \alpha\left(\frac{1}{\left(x+1\right)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3\left(x+1\right)^3}$$

ce qui donne :

$$\frac{\left(1-2\alpha\right)x^2 + \left(2-\alpha\right)x + 1}{x^3\left(x+1\right)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3\left(x+1\right)^3}$$

soit :

$$\left(1-2\alpha\right)x^3 + 3\left(1-\alpha\right)x^2 + \left(3-\alpha\right)x + 1 = ax^2+bx+c$$

et :

$$\alpha = \frac{1}{2},\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = 1$$

On a donc, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{3n^2+5n+2}{n^3(n+1)^3} \\ &= \frac{1}{2}\frac{3n+2}{n^3(n+1)^2}\end{aligned}$$

et en faisant la somme :

$$R_3(N) - \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq N}\frac{3n+2}{n^3(n+1)^2}$$

où :

$$\rho_N = \sum_{n\geq N}\frac{3n+2}{n^3(n+1)^2} = \int_N^{+\infty}\frac{3x+2}{x^3(x+1)^2}dx + o\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_N^{+\infty}\frac{3x+2}{x^3(x+1)^2}dx &= \int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2}\int_N^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2}\int_N^{N+1}\frac{1}{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{N}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) + o\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}R_3(N) &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}\rho_N \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \frac{1}{12}R_2(N) - \frac{1}{12}R_3(N) + \frac{1}{40}\frac{1}{N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ &= \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{2N^2} + \tfrac{1}{6N^3}\right) - \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{2N^2} + \tfrac{1}{2N^3}\right) + \tfrac{1}{40N^3} + o\left(\tfrac{1}{N^3}\right) \\ &= \frac{1}{12N} - \frac{1}{360N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned}$$

Et si on est courageux, on continue.

Chapitre 2

CAPES externe 2010, épreuve 1

2.1 Énoncé

Introduction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$$

On étudie la série de terme général a_n. On montrer qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ et appelée constante d'Euler. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

– I – Première approche de la constante d'Euler

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, montrer que :

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.
3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}dt$$
puis montrer que pour tout $p \geq 2$, on a :
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq a_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$
4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$$
5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que :
$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$
7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

– II – Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est intégrable sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.
On admettra le résultat suivant : soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :
$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1. Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$$
   (a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$
   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.
   (c) Conclure.

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
   Soient x et y deux réels strictement positifs.
   (a) Démontrer que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt$$
   (b) Montrer que pour $a \leq b$ on a pour tout réel $z > 0$:
$$e^{-bz}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-az}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
   (c) Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3. **Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.**
   (a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :
$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \text{ et } \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)$$

(b) En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t}-\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\right)$$

(c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1-\frac{1-e^{-t}}{t}\geq 0$$

(d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$$

et démontrer l'égalité :

$$\gamma=\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$$

4. **Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.**
Soit y un réel strictement positif.

(a) Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$ puis déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln(y)+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right)=0$$

(b) Démontrer que :

$$\gamma+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

(c) En déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln(y)+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)=0$$

(d) Démontrer que $t\mapsto e^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt=\lim_{y\to 0^+}\left(e^{-y}\ln(y)+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)$$

(e) Conclure alors que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$

– III – Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1.

(a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

Indication : on pourra calculer chacune des deux intégrales.

(b) En utilisant l'égalité obtenue en **II.3.d.** démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$ (on rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$).

(a) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$$

(c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$F(x) = e^x \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\gamma + \ln(x) = e^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

4. Soient un entier $n \geq 1$ et un entier $a \geq 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}$$

Indication : on pourra admettre et utiliser l'inégalité : $n! \geq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\left| \gamma + \ln(n) - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}$$

6. Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près (on ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée).

– IV – La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :

$$v_p = p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

1.

(a) En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$v_p = p\left(\sigma_{p-1} - \sigma_p\right) \text{ où } \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

(d) En utilisant le développement asymptotique de H_n obtenu en **I.5.** conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2(n) \rfloor}{n}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

(b) Soient n un entier naturel et m un entier tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

(c) Soient n un entier naturel et m un entier tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=1}^{n} v_p + O\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma$$

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

(a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

(b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

– V – La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall x \in \mathcal{F},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1]$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = Id_{\mathcal{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}$$

Indication : écrire $\Delta = Id_{\mathcal{F}} - T$ où T est l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ défini, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.

2. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{2^n} \binom{n}{p} \right)_{n\geq p}$ converge vers 0.

(b) On suppose dans cette question que $\ell = 0$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0$$

Indication : on pourra utiliser l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

et étant donné un réel $\varepsilon > 0$, choisir un entier k suffisamment grand pour que l'on ait :

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3. Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_k \text{ et } V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$$

(a) Démontrer que :

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N} \binom{N+1}{q+1} U_q$$

On pourra observer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, avec par convention $U_{-1} = 0$.

(b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k$$

4. On considère dans cette question un entier $n \geq 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}$$

(a) Montrer que, pour tout entier $m \geq 0$, on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}$$

Indication : on pourra admettre et utiliser le résultat suivant : pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{m+n+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}$$

(c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}$$

2.2 Corrigé

– I – Première approche de la constante d'Euler

1. La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall p \geq 1,\ \frac{1}{p+1} = \int_p^{p+1}\frac{dt}{p+1} < \int_p^{p+1}\frac{dt}{t} < \int_p^{p+1}\frac{dt}{p} = \frac{1}{p}$$

et :

$$0 < a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1}\frac{dt}{t} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

[0] Correction de J.-E. Rombaldi.

2. Il en résulte que pour $n \geq 1$, on a :

$$0 < S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \leq \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante ($S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$) et majorée, donc convergente vers un réel $\gamma \in [0,1]$.
En fait de manière plus générale, si $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue décroissante et F sa primitive nulle en 1, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} f(p) - F(n+1) = \sum_{p=1}^{n} a_p$$

pour tout $n \geq 1$, où $a_p = f(p) - \displaystyle\int_p^{p+1} f(t)\,dt$, est croissante majorée, donc convergente.
La fonction F est définie par :

$$\forall x \geq 1,\ F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= f(n+1) - (F(n+2) - F(n+1)) \\ &= \int_{n+1}^{n+2} (f(n+1) - f(t))\,dt \end{aligned}$$

avec f continue et $f(n+1) \geq f(t)$ pour tout $t \in [n+1, n+2]$. On a donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall p \geq 1,\ f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(t)\,dt \leq f(p)$$

et :

$$0 \leq a_p = f(p) - \int_p^{p+1} f(t)\,dt < f(p) - f(p+1).$$

Il en résulte que pour $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \leq \sum_{p=1}^{n} (f(p) - f(p+1)) = f(1) - f(n+1) < f(1)$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante majorée, donc convergente vers un réel $\ell \in [0, f(1)]$.

3. Le changement de variable $x = t - p$ nous donne :

$$a_p = \int_p^{p+1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{t-p}{t} dt = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{x+p} dx$$

Pour $p \geq 2$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$p \leq x + p \leq p + 1$$

et en conséquence :

$$\frac{1}{2(p+1)} = \frac{1}{p+1} \int_0^1 x dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x+p} dx \leq \frac{1}{p} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2p}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2p(p+1)} \leq a_p \leq \frac{1}{2p^2} \leq \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

4. Pour $m > n \geq 1$, on a $m \geq 2$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \\
&\leq S_m - S_n = \sum_{p=n+1}^{m} a_p \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

Puis en faisant tendre m vers l'infini, à n fixé, on en déduit que :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$$

5. On a $\gamma - S_n = \gamma - H_n + \ln(n+1)$, donc :

$$\frac{1}{2(n+1)} - \ln(n+1) \leq \gamma - H_n \leq \frac{1}{2n} - \ln(n+1)$$

ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \gamma - H_n + \ln(n) + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

avec :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\varepsilon_n$$

Il en résulte que :

$$\frac{1}{2\left(n+1\right)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon_n\leq\gamma-H_n+\ln\left(n\right)+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n}\varepsilon_n$$

ou encore :

$$\frac{1}{n}\left(\varepsilon_n-\frac{1}{2\left(n+1\right)}\right)\leq\gamma-H_n+\ln\left(n\right)+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n}\varepsilon_n$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\gamma-H_n+\ln\left(n\right)+\frac{1}{2n}\right)=0$$

ce qui signifie que :

$$H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln\left(n\right)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6. De :

$$\frac{1}{2\left(n+1\right)}\leq\gamma-S_n\leq\frac{1}{2n}$$

on déduit que :

$$0\leq\gamma-T_n\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2n\left(n+1\right)}$$

7. L'encadrement $0\leq\gamma-T_n\leq10^{-2}$ sera réalisé si $\dfrac{1}{2n\left(n+1\right)}\leq\dfrac{1}{100}$, ce qui équivaut à $n\left(n+1\right)\geq50$ et qui est réalisé pour $n=7$. On a alors :

$$T_7\backsimeq0.575\leq\gamma\leq T_7+10^{-2}\backsimeq0.585$$

et :

$$0\leq\gamma-T_7\leq\frac{1}{112}\backsimeq8.928\times10^{-3}$$

– II – Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1.

(a) Les fonctions considérées sont définies et continues sur $[1,+\infty[$. De plus elles sont à valeurs positives. La convergence des intégrales résulte celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ et de :

$$\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} \text{ et } 0 < \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}.$$

(b) Pour $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-e^{-t}} - 1\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}+o(t)} - 1\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{t}{2}+o(t)\right) = \frac{1}{2}+o(1) \underset{t\to 0^+}{\to} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c) La question précédente nous dit que la fonction φ se prolonge par continuité en 0 et comme elle est intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit qu'elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2.

(a) Les changements de variables $u = at$ et $v = bt$ avec $a > 0$ et $b > 0$ donnent :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt &= \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{ay}\frac{e^{-u}}{u}du - \int_{bx}^{by}\frac{e^{-v}}{v}dv\\ &= \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-u}}{u}du + \int_{bx}^{ay}\frac{e^{-u}}{u}du - \int_{bx}^{ay}\frac{e^{-v}}{v}dv - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-v}}{v}dv\\ &= \int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant décroissante sur $]0,+\infty[$, on a pour tout $z > 0$:

$$e^{-bz}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = e^{-bz}\int_{az}^{bz}\frac{dt}{t} \leq \int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-az}\int_{az}^{bz}\frac{dt}{t} = e^{-az}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(c) Pour $0 < x < y$, on a :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

et en exploitant les encadrements précédents :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)\left(e^{-bx} - e^{-ay}\right) \leq \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right)(e^{-ax} - e^{-by})$$

Faisant tendre y vers l'infini, on a pour tout $x > 0$:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) e^{-bx} \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) e^{-ax}$$

et faisant tendre x vers 0^+, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

3. **Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.**

(a) Pour $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et donc :

$$\frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-nt} - e^{-(n+1)t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = 1$$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right) = \frac{1}{t}.$

(b) Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right)\end{aligned}$$

et :

$$e^{-t}\left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right)$$

(c) Le théorème des accroissements finis nous dit que pour tout réel $t > 0$, il existe un réel $c_t \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-c_t}$$

ce qui donne :

$$1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1 - e^{-c_t} > 0$$

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} u_n(t) &= e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \\ &= e^{-(n+1)t}\left(1 - \frac{1 - e^{-t}}{t}\right) \end{aligned}$$

Cette suite de fonctions converge simplement sur I vers la fonction continue :

$$f : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right).$$

Chaque fonction u_n est continue sur I, à valeurs positives et intégrable avec :

$$\begin{aligned} \alpha_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt - \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right)dt \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$(\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right))$.

On déduit alors du théorème de Lebesgue admis que f est intégrable sur I avec :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n}\alpha_p &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n}\left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+2) = S_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \gamma \end{aligned}$$

On a donc bien $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \gamma$.

4. **Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.**

   (a) Le changement de variable $u = e^{-t}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^{e^{-y}} \frac{u}{1-u}\frac{du}{u} &= \left[-\ln(1-u)\right]_0^{e^{-y}} \\ &= -\ln\left(1-e^{-y}\right)\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt &= \ln(y) - \ln\left(1-e^{-y}\right) \\ &= \ln\left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right)\end{aligned}$$

   avec :

$$\frac{y}{1-e^{-y}} = \frac{y}{y+o(y)} = \frac{1}{1+o(1)} \underset{y\to 0^+}{\to} 1$$

   ce qui nous donne :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right) = \ln(1) = 0$$

   (b) On a :

$$\gamma = \int_0^y e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_y^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt$$

   et donc :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^y e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

   (c) On a :

$$\gamma + \ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^y f(t)\,dt + \ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

   la fonction $f : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ étant continue en 0.

   Il en résulte que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma + \ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt\right) = 0$$

(d) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t} |\ln(t)|$ est continue positive sur $I =]0, +\infty[$.
Avec $\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)| = -\ln(t)$ et la convergence de $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ (une primitive de $\ln(t)$ est $t\ln(t) - t$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0^+), on déduit que $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ est convergente et avec $\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$ (domination de l'exponentielle sur les puissances et les logarithmes), on déduit que $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est convergente.
Donc $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est convergente.
Une intégration par parties nous donne pour $0 < y < z$:

$$\int_y^z e^{-t}\ln(t)\, dt = \left[-e^{-t}\ln(t)\right]_y^z + \int_y^z \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{z\to+\infty}{\to} e^{-y}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

soit :

$$\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\, dt = e^{-y}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\, dt = \lim_{y\to0^+} \int_y^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\, dt = \lim_{y\to0^+} \left(e^{-y}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$$

(e) Notons $g(y) = \ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
On a $\lim_{y\to0^+} g(y) = -\gamma$ et :

$$e^{-y}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln(y)\left(e^{-y} - 1\right) + g(y)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\, dt &= \lim_{y\to0^+} \left(e^{-y}\ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right) \\ &= \lim_{y\to0^+} \left(\ln(y)\left(e^{-y} - 1\right) + g(y)\right) = -\gamma\end{aligned}$$

puisque $\ln(y)(e^{-y} - 1) = -y\ln(y) + o(y)$ et $\lim_{y\to0^+} y\ln(y) = 0$.

– III – Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1.

(a) On a, pour $0 < \varepsilon < 1$:

$$\int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \left[\ln(t) - \ln\left(1-e^{-t}\right)\right]_\varepsilon^1$$
$$= \left[\ln\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)\right]_\varepsilon^1 \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} -\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

et pour $R > 1$:

$$\int_1^R \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \left[\ln\left(1-e^{-t}\right)\right]_1^R \underset{R\to+\infty}{\to} -\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

et donc

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

(b) En utilisant les calculs faits en **II.4.b.** on a :

$$\gamma + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

2.

(a) Les coefficients de la série entière considérée sont strictement positifs et $\frac{H_k}{k!} \sim \frac{\ln(k)}{k!} = b_k$ avec $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 0$, ce qui nous dit que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$, sa somme étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}}{k!} x^k$$

et pour $x > 0$:

$$F'(x) - F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1} - H_k}{k!} x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)$$

(c) La fonction $G : x \mapsto e^x \displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$G'(x) = G(x) + e^x \frac{1-e^{-x}}{x}$$

donc $H = G - F$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 0$, ce qui nous donne $H = 0$, soit $G = F$.

3. En **II.4.b.** on vu que :

$$\gamma + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^x e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

et avec :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt &= \int_0^x \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1-e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= e^{-x} F(x) + \int_0^x \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \gamma + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - e^{-x} F(x) &= \int_0^x \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \\ &\quad + \int_1^x \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \\ &= -\ln(x) \end{aligned}$$

(en **III.1.a.** on a vu que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = 0$).

4. Pour $m \geq 1$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} R_m(x) &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{k}{k!} x^k = x^{m+1} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-(m+1)} \\ &\leq x^{m+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+j)!} x^j = \frac{x^{m+1}}{m!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{m!}{(m+j)!} x^j \\ &\leq \frac{x^{m+1}}{m!} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+j)\cdots(m+1)} x^j \right) \end{aligned}$$

et pour $0 < x < m+1$, on en déduit que :

$$R_m(x) \leq \frac{x^{m+1}}{m!}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{m+1}\right)^j\right) = \frac{x^{m+1}}{m!}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{m+1}\right)^j$$
$$\leq \frac{x^{m+1}}{m!}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^j = \frac{x^{m+1}}{m!}\frac{1}{1-\frac{x}{m}} = \frac{x^{m+1}}{m!}\frac{m}{m-x}$$

En utilisant l'inégalité de Stirling, on a :

$$\frac{x^{m+1}}{m!} \leq \frac{x^{m+1}e^m}{\sqrt{2\pi m}m^m} = \frac{x}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{xe}{m}\right)^m$$

et donc :

$$R_m(x) \leq \frac{x^{m+1}}{m!}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^j = \frac{m}{m-x}\frac{x^{m+1}}{m!} \leq \frac{m}{m-x}\frac{x}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{xe}{m}\right)^m$$

Prenant $x = n \geq 1$ et $m = an$ avec $a \geq 2$, cela nous donne :

$$R_{an}(an) \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^j = \frac{a}{a-1}\frac{n^{an+1}}{(an)!} \leq \frac{a}{a-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an}$$

5. Avec :

$$\gamma + \ln(n) = e^{-n}F(n) - \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

on déduit que :

$$\varepsilon_n = \gamma + \ln(n) - e^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{H_k}{k!}n^k = e^{-n}R_{an}(an) - \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

et :

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{a}{a-1}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

et tenant compte de :

$$\int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \leq \frac{1}{n}\int_n^{+\infty}e^{-t}dt = \frac{e^{-n}}{n}$$

on déduit que :

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{a}{a-1}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}$$

le terme de droite de cette dernière inégalité tendant vers 0.

6. Prenant $a = 3$, on a $\dfrac{e}{3} < 1$ et :

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{3}{2}\frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{6\pi}}\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \frac{e^{-n}}{n} \backsimeq \left(0.345\,49\sqrt{n}\,(0.743\,91)^n + \frac{1}{n}\right)e^{-n}$$

et l'inégalité $|\varepsilon_n| \leq 10^{-10}$ sera réalisée pour $n = 22$.
La quantité :

$$\gamma_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{3n}\frac{H_k}{k!}n^k - \ln(n)$$

pour $n = 22$, nous donne alors une valeur approchée de γ à 10^{-10} près.

– IV – La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

1.

(a) On a, pour $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2h} - \sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2h+1}\\ &= \sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{h} - \left(\sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2h} + \sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2h+1}\right)\\ &= \sum_{h=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{h} - \sum_{j=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{h} = \sigma_{p-1} - \sigma_p\end{aligned}$$

(b) Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} v_p &= \sum_{p=1}^{n} p\,(\sigma_{p-1} - \sigma_p) = \sum_{p=1}^{n} p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^{n} p\sigma_p\\ &= \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)\,\sigma_p - \sum_{p=0}^{n} p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p - n\sigma_n\end{aligned}$$

(c) En utilisant la partition :

$$\{1, 2, \cdots, 2^n - 1\} = \bigcup_{p=0}^{n-1}\left\{2^p, 2^p + 1, \cdots, 2^{p+1} - 1\right\}$$

on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{2^n-1}\frac{1}{h} = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

(d) En utilisant **I.5.** on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p &= H_{2^n}-\frac{1}{2^n}=\ln\left(2^n\right)+\gamma+\frac{1}{2^{n+1}}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}\\ &= n\ln(2)+\gamma-\frac{1}{2^{n+1}}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}n\sigma_n &= n\left(\sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{h}\right)=n\left(H_{2^{n+1}-1}-H_{2^n-1}\right)\\ &= n\left(H_{2^{n+1}}-H_{2^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &= n\left(H_{2^{n+1}}-H_{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &= n\left(\ln\left(2^{n+1}\right)+\frac{1}{2^{n+2}}-\ln\left(2^n\right)-\frac{1}{2^{n+1}}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\\ &= n\left(\ln(2)-\frac{1}{2^{n+2}}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}v_p &= \sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p-n\sigma_n\\ &= \gamma+\frac{n-2}{2^{n+2}}+(1-n)\,o\left(\frac{1}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\gamma\end{aligned}$$

2.

(a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, mais la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas décroissante à partir d'un certain rang. En effet, pour $n=2^k$, on a $\log_2(n)=\dfrac{\ln\left(2^k\right)}{\ln(2)}=k$ et :

$$\log_2(n+1)=\frac{\ln\left(2^k\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right)}{\ln(2)}=k+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}{\ln(2)}$$

avec $1+\dfrac{1}{2^k}<2$ pour $k\geq 1$, donc $|u_n|=\dfrac{k}{2^k}$ et $|u_{n+1}|=\dfrac{k+1}{2^k+1}>|u_n|$ ($\dfrac{k+1}{2^k+1}>\dfrac{k}{2^k}$ équivaut à $2^k>k$, qui est réalisé pour $k\geq 1$).
On ne peut donc utiliser le théorème des séries alternées.

(b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles d'une série alternée $\sum (-1)^n \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0.
En utilisant la décroissance de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} S_{2n} - S_{2n-2} = \alpha_{2n} - \alpha_{2n-1} \leq 0, \\ S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
On a alors pour $p \geq q \geq 1$:

$$S_{2q-1} \leq S_{2p-1} \leq S_{2p} \leq S_{2q}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} 0 \leq S_{2p} - S_{2q-1} \leq S_{2q} - S_{2q-1} = \alpha_{2q} \\ -\alpha_{2q} = S_{2q-1} - S_{2q} \leq S_{2q-1} - S_{2p-1} \leq 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall m \geq 2q,\ |S_m - S_{2q-1}| \leq \alpha_{2q}.$$

Pour $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $q = 2^n$ et $m \geq 2q = 2^{n+1}$, cela donne :

$$|S_m - S_{2q-1}| = \left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \alpha_{2q} = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$$

Soient $n \geq 0$ et $m \geq 1$ tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$ (ce qui équivaut à $(n+1)\ln(2) \leq \ln(m) < (n+2)\ln(2)$, ou encore à $n+1 \leq \log_2(m) < n+2$, soit à $n+1 = \lfloor \log_2(m) \rfloor$).
Pour $2^{n+1} \leq k \leq m < 2^{n+2}$, on a $n+1 \leq \log_2(k) < n+2$ et $n+1 = \lfloor \log_2(k) \rfloor$, donc $u_k = (-1)^k \dfrac{\lfloor \log_2(k) \rfloor}{k} = (n+1)\dfrac{(-1)^k}{k}$, ce qui nous donne :

$$\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k = (n+1) \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}$$

et :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

(c) On a, pour $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k$$

avec :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} (-1)^k \frac{\lfloor \log_2(k) \rfloor}{k} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} (-1)^k \frac{\lfloor \log_2(k) \rfloor}{k}\end{aligned}$$

en utilisant la partition :

$$\left\{1, 2, \cdots, 2^{n+1}-1\right\} = \bigcup_{p=0}^{n} \left\{2^p, 2^p+1, \cdots, 2^{p+1}-1\right\}$$

et considérant que $\lfloor \log_2(k) \rfloor = p$ pour $2^p \leq k < 2^{p+1}$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k = \sum_{p=0}^{n} p \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{p=1}^{n} v_p$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=1}^{n} v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k$$

avec :

$$\frac{2^n}{n} \left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leq \frac{2^n}{n} \frac{n+1}{2^n} \leq 2$$

ce qui se traduit par :

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=1}^{n} v_p + O\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

Enfin, en considérant que $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma$.

3.

(a) Le théorème des séries alternées nous dit que $|r_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$, ce qui nous assure la convergence absolue de $\sum r_n$.

(b) On a :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}\right) = p\left(r_p - r_{p+1}\right)$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k\left(r_k - r_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}$$

Puis avec $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma$ et $n\left|r_{n+1}\right| \leq \dfrac{n}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on déduit que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j}\right)$$

(pour la dernière somme, on a effectué le changement d'indice $k = 2^n + j$).

– V – La formule de Gosper (1972)

1. Comme $Id_{\mathcal{F}}$ et T commutent, on a :

$$\Delta^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} T^p$$

avec :

$$T^p(x)[k] = x_{p+k}$$

2.

(a) Pour $n \geq p$, on a :

$$0 < \frac{1}{2^n}\binom{n}{p} = \frac{1}{2^n}\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \leq \frac{1}{2^n}\frac{n^p}{p!} = \varepsilon_n$$

avec :

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1$$

il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right) = 0$.

(b) Comme $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$, pour tout réel $\varepsilon>0$, on peut trouver un entier k tel que $|u_p|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $p\geq k$. Pour $n>k$, on a alors :

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}|u_p|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

puisque $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=(1+1)^n=2^n$ et :

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|\leq\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}u_p+\frac{\varepsilon}{2}$$

avec $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right)=0$ pour tout p compris entre 0 et k. On peut donc trouver un entier $n_0>k$ tel que $\displaystyle\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}u_p<\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui entraîne $\left|\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_0$ et signifie que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p=0$.

(c) Avec :

$$\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p-\ell=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(u_p-\ell)$$

on déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right)=\ell$.

Ce résultat est un cas particulier du théorème de Césaro suivant : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)=+\infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)\,.$$

3.

(a) On a :

$$\begin{aligned}\Delta^n(x)[0] &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}x_p = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(U_p - U_{p-1})\\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}U_p - \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}U_{p-1}\\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}U_p - \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p+1}U_p\end{aligned}$$

(avec la convention $\sum_{p=0}^{-1} = 0$) et en utilisant la relation

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

pour $0 \leq p \leq n-1$, il vient :

$$\Delta^n(x)[0] = \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}U_p - 2\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p+1}U_p$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}V_N &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}\Delta^n(x)[0]\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}U_p - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p+1}U_p\\ &= \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p+1}U_p - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p+1}U_p\\ &= \frac{1}{2^{N+1}}\sum_{p=0}^{N}\binom{N+1}{p+1}U_p\end{aligned}$$

(b) On a :

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}}\sum_{q=0}^{N}\binom{N+1}{q+1}U_q = \frac{1}{2^{N+1}}\sum_{q=0}^{N+1}\binom{N+1}{q}U_{q-1}$$

avec $\lim_{q\to+\infty} U_{q-1} = U = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k$. Le théorème de Césaro nous dit alors que $\lim_{N\to+\infty} V_N = U$, ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = U$.

4.

(a) En utilisant **V.1.** on a :

$$\begin{aligned}
\Delta^m(x)[0] &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} x_p = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} \frac{1}{2^n+p} \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} \int_0^1 t^{2^n+p-1} dt \\
&= \int_0^1 t^{2^n-1} \left(\sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} t^p \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{2^n-1} (1-t)^m \, dt = \frac{m!\,(2^n-1)!}{(m+2n)!} \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{m!\,(2^n)!}{(m+2n)!} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}
\end{aligned}$$

(b) En utilisant **IV.3.b.** et **V.3.b.** on a :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n+j} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j x_j \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Delta^m(x)[0]}{2^{m+1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}
\end{aligned}$$

(c) Comme les séries considérées sont à termes positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{m+n+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{2^{m+n+2}}\frac{1}{\binom{2^{n+1}+m}{m}}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2\\ n+m=p}}\frac{1}{2^{m+n+2}}\frac{1}{\binom{2^{n+1}+m}{m}} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+2}}\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2\\ n+m=p}}\frac{1}{\binom{2^{n+1}+m}{m}}\\
&= \frac{1}{4}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+2}}\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\binom{2^{p-m+1}+m}{m}} = \frac{1}{4}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-m}+m}{m}}\\
&= \frac{1}{4}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\left(1+\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-m}+m}{m}}\right)\\
&= \frac{1}{4}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-m}+m}{m}}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-m}+m}{m}} = \frac{1}{2}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}
\end{aligned}$$

Chapitre 3

CAPES externe 2011, épreuve 1

3.1 Énoncé

PROBLEME N° 1. Constructions de triangles

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M n'appartenant pas à la droite (BC).

Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie.

On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

a) M est le centre de gravité du triangle ABC.

b) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

d) M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

PROBLEME N° 2. Autour du théorème des valeurs intermédiaires

– I – Préliminaires

On pourra utiliser les résultats suivants :
– toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
– soient a et b des réels tels que $a < b$; toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ;

– toute suite croissante et majorée est convergente, toute suite décroissante et minorée est convergente ;
– si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)+\lim_{n\to+\infty}(v_n)$$

et si pour tout entier n, on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) \leq \lim_{n\to+\infty}(v_n)$.

Les résultats suivants sont à démontrer ; ils ne doivent pas être considérés ici comme des propriétés connues.

1. Démontrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite ℓ, alors pour tout entier n, on a $w_n \geq \ell$ (*on raisonnera par l'absurde*).
2. **Théorème des suites adjacentes.**
   On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, c'est-à-dire telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (a) Montrer que la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a $v_n-u_n \geq 0$.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   (d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
3. **Suite et application continue.**
   Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel ℓ. Soit f une application, définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et continue en ℓ. Montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

– II – Propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide.
On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.
Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.**
   On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

si f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ alors f possède la propriété $\mathcal{P}$

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$; dans la suite, on supposera cette hypothèse vérifiée.
On considère les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ *et* pour tout entier n :

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda, \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} = b_n$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda, \text{ alors } a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

(a) Justifier que, pour tout entier n, $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$.

(b) Montrer que, pour tout entier n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

(c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Conclure.

2. **Application 1 : un théorème du point fixe.**
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

3. **Application 2 : première formule de la moyenne.**
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que si la fonction g est positive sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

4. **Application 3.**
Soit f une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f(c_n) = f\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

Indication :on pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

(b) Montrer que si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. *On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par :*

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right).$$

– III – Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

1. **Un exemple.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f vérifie la proposition $\mathcal{P}$ mais n'est pas continue en 0.

2. **Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$: un théorème de Darboux.**
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et $(a,b) \in I^2$ $(a < b)$.
On se propose de montrer que f' vérifie $\mathcal{P}$.
On suppose que $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

   (a) Justifier qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$.

   (b) Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.

   (c) Conclure.

   (d) En déduire un exemple d'une fonction définies sur $\mathbb{R}$ et qui ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. **Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ soit continue.**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide et telle que :
– f vérifie $\mathcal{P}$;
– pour tout $x \in I$, $f^{-1}\{f(x)\}$ est fermé dans I.
Montrer que f est continue sur I.

PROBLEME N° 3. Quelques propriétés des polynômes de Laguerre

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

– I – Étude de la famille (L_n)

1. Justifier les écritures précédentes, c'est-à-dire que L_n est bien définie pour tout entier n.
2. Calculer L_0, L_1 et L_2 explicitement.
3. En précisant le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé, écrire une procédure permettant d'afficher L_n pour une valeur de n donnée.
4. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.
   Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L_n'.
   (b) Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.
   (c) En déduire que :
   $$L_{n+1} = \frac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right) L_n.$$
6. En remarquant que $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left((h_{n+1})^{(n+1)}\right)'$, montrer la relation :
   $$L_{n+1}' = L_n' - L_n.$$
7. En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X L_n'' + (1 - X) L_n' + n L_n = 0$$
   et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1) L_{n+1} + (X - 2n - 1) L_n + n L_{n-1} = 0.$$

– II – Application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de L_n.
2.
   (a) Soient n un entier naturel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^{n+2} \sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$
   Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 mais que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 0 en 0.
   (b) Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et k un entier naturel tel que $k \leq n$. Donner une condition suffisante pour que $f^{(n-k)}$ admette un développement limité à l'ordre k en 0.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq n$.
   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 de h_n.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre N en 0 de $h_n^{(n)}$.
   (c) Montrer alors que l'on a, au voisinage de 0 :
   $$L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o\left(x^N\right)$$
   où :
   $$c_p = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} \ (0 \leq p \leq N).$$
   (d) En déduire que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \binom{n}{p} \text{ si } 0 \leq p \leq n \\ 0 \text{ si } p > n. \end{cases}$$

– III – Étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

Pour tous P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}dx$$

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
4.
   (a) Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x)$$
   (b) Établir que, pour tout entier naturel n, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout entier p compris entre 0 et n, on a :
   $$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)\,P^{(p)}(x)\,dx$$
5. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

3.2 Corrigé

PROBLEME N° 1

a) Proposons deux méthodes :

Première méthode :

• *Analyse* : Si M est le centre de gravité du triangle ABC, et si I désigne le milieu de $[BC]$, alors M est au tiers de la base de la médiane $[AI]$, donc A est l'image de I par l'homothétie $h_{M,-2}$ de centre M et de rapport -2.

• *Synthèse* : On trace le milieu I de $[BC]$, et l'on pose $A = h_{M,-2}(I)$. Le point M est alors situé sur la médiane du triangle ABC issue de A, et au tiers de la base : c'est donc le centre de gravité du triangle ABC.
Notons que le triangle ABC ne peut pas être aplati, sinon M appartiendrait à la droite (AI) qui ne serait autre que la droite (BC), et l'on aurait $M \in (BC)$ ce qui est contraire à nos hypothèses.

• *Conclusion* : Il existe un et un seul point A solution quel que soit le choix de M à l'extérieur de (BC).

Seconde méthode :
Choisissons un repère orthonormal direct du plan, et travaillons avec les affixes des points dans ce repère. Notons a, b, c, m les affixes de A, B, C, M.

• *Analyse* : M est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si

$$m = \frac{1}{3}(a+b+c). \quad (*)$$

Dans ce cas $a = 3m - b - c$ est uniquement déterminé.

• *Synthèse* : On définit le point A d'affixe $a = 3m - b - c$. Cela nous permet d'avoir $(*)$ et donc d'affirmer que M est le centre de gravité du triangle ABC. Pour terminer, il faut vérifier que le triangle ABC n'est pas aplati. Raisonnons par l'absurde : s'il l'était, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a - b = \lambda(c - b)$, et l'on aurait :

$$m = \frac{1}{3}(b + \lambda(c-b) + b + c) = \frac{1}{3}(2b + \lambda(c-b) + c)$$

soit :

$$m - b = \frac{1}{3}(\lambda + 1)(c - b),$$

ce qui traduit l'alignement de B, C et M. C'est contraire aux hypothèses.

b) • *Analyse* : M doit appartenir à la médiatrice Δ_{BC} de $[BC]$.

• *Synthèse* : Si M appartient à la médiatrice Δ_{BC} de $[BC]$, il suffit de tracer le cercle $\mathcal{C}(M, MB)$ de centre M et de rayon MB et de choisir un point A sur ce cercle pour que M soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

• *Conclusion* :
- Si $M \notin \Delta_{BC}$, le problème n'a pas de solution.
- Si $M \in \Delta_{BC}$, le problème admet une infinité de solutions : tous les points A du cercle $\mathcal{C}(M, MB)$.

c) • *Analyse* : Si A est solution, alors A appartient à l'intersection de la perpendiculaire D_B à (CM) passant par B et de la perpendiculaire D_C à (BM) passant par C (3.1).

• *Synthèse* : On trace les droites D_B et D_C. Celles-ci se coupent en un point A qui est solution du problème. Pour vérifier que $D_B \cap D_C$ est un singleton, raisonnons par l'absurde et supposons que D_B et D_C soient parallèles. Dans ce cas :

$$\left.\begin{array}{l}(CM) \perp D_B = D_C \\ (BM) \perp D_C\end{array}\right\} \Rightarrow (CM) \,//\, (BM) \Rightarrow B, C, M \text{ alignés},$$

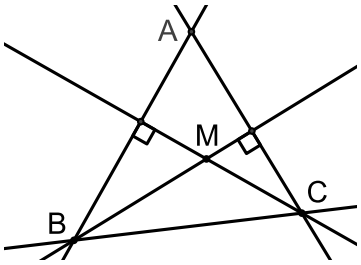


FIG. 3.1 – Cas de l'orthocentre

ce qui est absurde car $M \notin (BC)$.

• *Conclusion* : Il existe un et un seul point A solution quel que soit le choix de M hors de (BC).

d) • *Analyse* : Si M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, alors (BM) est la bissectrice du couple de demi-droites $([BC), [BA))$, ce qui revient à dire que A appartient à l'image d_B de la demi-droite $[BC)$ par la réflexion s_{BM} par rapport à (BM) (FIG. 3.2). Autrement dit :

$$A \in d_B = s_{BM}([BC)).$$

De même, A appartient à l'image d_C de la demi-droite $[CB)$ par la réflexion s_{CM} par rapport à (CM), ce que l'on écrit :

$$A \in d_C = s_{CM}([CB)).$$

Par conséquent $A \in d_B \cap d_C$.

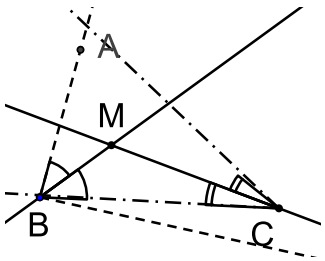


FIG. 3.2 – Construction de M

• *Synthèse* : On construit les demi-droites d_B et d_C. De deux choses l'une :

- Si $d_B \cap d_C = \varnothing$, notre problème n'admet pas de solution.

- Sinon on note A l'unique point d'intersection de d_B et d_C et l'on vérifie que le triangle ABC n'est pas aplati et que le point M est bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Voici ces deux vérifications :

$\triangleright$ Montrons que ABC n'est pas aplati en raisonnant par l'absurde.
Tout d'abord $A \neq B$, autrement l'assertion $s_{CM}([CB)) = [CA)$ deviendrait $s_{CM}([CB)) = [CB)$, ce qui implique $(CM) = (CB)$, donc $M \in (BC)$. C'est absurde. On vérifierait de même que $A \neq C$.

Ensuite on suppose par l'absurde que A, B, C sont alignés sur une droite D. Dans ce cas $s_{BM}((BC)) = (BA)$ et $s_{CM}((CB)) = (CA)$ donnent :

$$s_{BM}(D) = D = s_{CM}(D),$$

donc :

$$\begin{cases} (BM) = D \text{ ou } (BM) \perp D \\ \qquad \text{et} \\ (CM) = D \text{ ou } (CM) \perp D. \end{cases} \qquad (\natural)$$

Comme $M \notin (BC)$, $M \notin D$, et $(\natural)$ entraîne $(BM) \perp D$ et $(CM) \perp D$, donc $(BM) = (CM)$, donc $M \in (BC)$, ce qui est encore une absurdité.

$\triangleright$ $d_B = [BA) = s_{BM}([BC))$ donc (BM) est la bissectrice intérieure issue de B du triangle ABC. De même $d_C = [CA) = s_{CM}([CB))$ donc (CM) est la bissectrice intérieure issue de C. Le point M est à l'intersection de deux bissectrices intérieure de ABC, ce ne peut être que le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Remarques : On est déçu de constater que le point M ne peut pas être le centre du cercle inscrit à ABC dans de nombreux cas de figures : tous ceux où les demi-droites d_B et d_C sont disjointes. Après réflexion, cela semble normal, car les conditions imposées à M sont trop fortes pour que la construction soit possible tout le temps.

A la page 103 on peut voir deux cas de figure où les demi-droites d_B et d_C sont disjointes. En utilisant Geogebra (ou son imagination) on peut se convaincre que ces deux demi-droites se couperont si et seulement si $2\alpha + 2\beta < 2 \times \pi/2$, c'est-à-dire $\alpha+\beta < \pi/2$, où α et β désigne des mesures des angles géométriques $\widehat{CBM}$ et $\widehat{BCM}$.

Pour obtenir une construction valide dans *presque* tous les cas, il faut en fait ne pas chercher à construire A pour que M soit le centre du cercle inscrit à ABC, mais plutôt construire A pour que M soit l'un des centres des cercle inscrits ou circonscrits au triangle ABC. Dans ce "second problème" de construction, notre questionnement est plus "symétrique". On raisonne comme on l'a fait

plus haut, mais cette fois en considérant des droites, donc en traçant D_B et D_C telles que :

$$\begin{cases} D_B = s_{BM}((BC)) \\ D_C = s_{CM}((CB)) \end{cases}$$

et en choisissant A dans $D_B \cap D_C$. La synthèse est facile car avoir $D_B = (BA)$ et $D_C = (CA)$ permet d'affirmer que (BM) et (CM) sont bien des bissectrices du triangle ABC (intérieures ou extérieures), et donc que M est sur une dernière bissectrice, et qu'ainsi M est bien un centre de cercles inscrits ou circonscrits au triangle ABC.

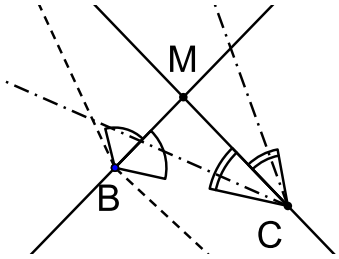


FIG. 3.3 – Cas où $(BM) \perp (CM)$

Une dernière question : quelles sont les positions de M interdites ? Celles où $D_B \cap D_C \neq \varnothing$, bien sûr, mais peut-on en dire plus ? Oui, le calcul nous montre que :

> On peut tracer une solution A de ce "second problème" si et seulement si le triangle BCM n'est pas rectangle en M (FIG. 3.3), autrement dit si M n'appartient pas au cercle de diamètre $[BC]$.

Pour le voir, écrivons :

$$D_B \cap D_C = \varnothing \;\Leftrightarrow\; D_B \text{ et } D_C \text{ sont strictement parallèles.}$$

Comme $D_B = D_C$ est impossible (sinon $(BC) = s_{BM}((BC)) = s_{CM}((CB))$ et $M \notin (BC)$ entraînent $(BM) \perp (BC)$ et $(CM) \perp (BC)$, d'où B, C, M alignés, absurde), on a même :

$$D_B \cap D_C = \varnothing \;\Leftrightarrow\; D_B \text{ et } D_C \text{ parallèles.}$$

Passons en vectoriel : notons σ_{BM} et σ_{CM} les réflexions vectorielles de base

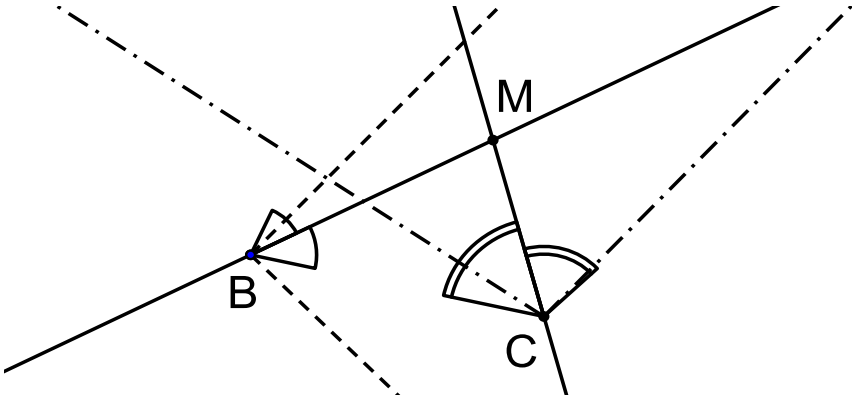
$\mathbb{R}\overrightarrow{BM}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{CM}$, et notons $\overrightarrow{D}_B$ et $\overrightarrow{D}_C$ les directions de D_B et D_C. On a :

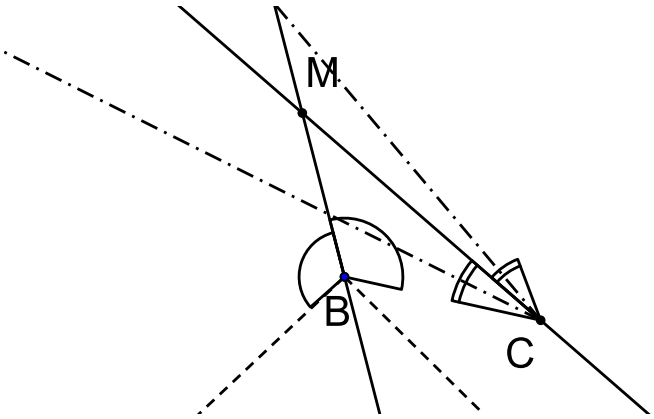
$$\begin{aligned} D_B \cap D_C = \varnothing &\Leftrightarrow \overrightarrow{D}_B = \overrightarrow{D}_C \\ &\Leftrightarrow \sigma_{BM}(\mathbb{R}\overrightarrow{BC}) = \sigma_{CM}(\mathbb{R}\overrightarrow{BC}) \\ &\Leftrightarrow (\sigma_{CM} \circ \sigma_{BM})(\mathbb{R}\overrightarrow{BC}) = \mathbb{R}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Comme $r = \sigma_{CM} \circ \sigma_{BM}$ est une rotation vectorielle d'angle $\theta = 2(BM, CM)$, on obtient bien :

$$\begin{aligned} D_B \cap D_C = \varnothing &\Leftrightarrow \sigma_{CM} \circ \sigma_{BM} = \pm Id \\ &\Leftrightarrow 2(BM, CM) \equiv 0 \text{ ou } \pi \ (\mathrm{mod}\, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow (BM) = (CM) \text{ ou } (BM) \perp (CM) \\ &\Leftrightarrow (BM) \perp (CM), \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant vraie car les points M, B et C ne sont pas alignés.





Deux cas de figures où $d_B \cap d_C = \varnothing$

PROBLEME N° 2. Autour du théorème des valeurs intermédiaires

– I – Préliminaires

1. Supposons qu'il existe un indice n_0 pour lequel $w_{n_0} < \ell$. Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \geq n_0$, $w_n \leq w_{n_0} < \ell$, soit $\ell - w_n \geq \ell - w_{n_0} > 0$ et :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (\ell - w_n) \geq \ell - w_{n_0} > 0$$

ce qui est impossible.

2.

(a) La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante comme somme de deux suites décroissantes (si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante.

(b) On déduit alors de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \geq 0.$$

On peut en fait montrer, un peu plus généralement, que :

$$\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ v_m - u_n \geq 0.$$

Supposons qu'il existe deux indices n et m tels que $u_n > v_m$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on a alors pour tout $k \geq \max(n,m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, ce qui entraîne $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et $0 = \lim_{k\to+\infty}(u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible.

(c) En utilisant la question précédente et la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0,$$

c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes.

(d) Avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

on déduit qu'elles convergent vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n).$$

3. La fonction f est définie sur $Y = X \cup \{\ell\}$ et continue en ℓ, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - \ell| < \eta$ dans Y entraîne $|f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de X qui converge vers ℓ, il existe alors un entier n_0 tel que $|u_n - \ell| < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$. On a donc bien $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

– II – Propriété des valeurs intermédiaires

1.

(a) On vérifie par récurrence sur $n \geq 0$ que $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$. C'est vrai pour $n = 0$, puisque $(a_0, b_0) = (a,b)$. Supposant le résultat acquis pour n, le segment I_n d'extrémités a_n et b_n est contenu dans $[a,b]$ et le point $\frac{a_n+b_n}{2}$ qui est le milieu de I_n est aussi dans I_n, donc dans $[a,b]$. Il en résulte que $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$.

(b) On a, pour tout entier n :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda \end{cases} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

(c) On en déduit, par récurrence sur $n \geq 0$, que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} > 0$ et en conséquence, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.
Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \\ a_n - a_n \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b_n - a_n}{2} \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \\ 0 \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda \end{cases} \geq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \\ -\dfrac{b_n - a_n}{2} \text{ si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda \end{cases} \leq 0$$

donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En définitive les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Ces suites convergent donc vers une même limite $\ell \in [a,b]$ (puisque les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans le fermé $[a,b]$).
De plus, par construction, on a $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ pour tout $n \geq 0$.
En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et en supposant cet encadrement vérifié au rang $n \geq 0$, on a :

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq \lambda \text{ si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda \quad \text{avec } \frac{a_n+b_n}{2} = b_{n+1}$$

et

$$f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq \lambda \text{ si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \quad \text{avec } \frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1}.$$

Avec $\ell = \lim_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}}(b_n)$ et la continuité de f, on déduit que :

$$f(\ell) = \lim_{n\in\mathbb{N}}(f(a_n)) \leq \lambda \leq \lim_{n\in\mathbb{N}}(f(b_n)) = f(\ell),$$

ce qui équivaut à $f(\ell) = \lambda$.

2. La fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue avec $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ dans le cas où on a l'inclusion $f([a,b]) \subset [a,b]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors qu'il existe un point c dans $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$.

3. La fonction f étant continue sur le compact $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes, il existe donc deux réels α, β dans l'intervalle I tels que $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta)$. Comme g est à valeurs positives ou nulles, on a $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ et :

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, on a alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et n'importe quel point $c \in [a,b]$ convient.
Si $\gamma = \int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, alors $\gamma > 0$, $\delta = \frac{1}{\gamma}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \in [f(\alpha), f(\beta)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel c compris entre α et β tel que $\delta = f(c)$, ce qui donne la première formule de la moyenne.
En utilisant le théorème d'intégration par parties et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut montrer la seconde formule de la moyenne qui s'énonce comme suit.

Théorème. Soient f une fonction à valeurs réelles positives de classe $\mathcal{C}^1$

et décroissante sur $[a,b]$ et g une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx.$$

Démonstration. Soit G la primitive de g nulle en a. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b)\, G(b) - \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx$$

La fonction G étant continue sur le compact $[a,b]$ est bornée et on peut noter $m = \inf_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} G(x)$. Comme f est à valeurs positives, on a :

$$mf(b) \leq f(b)\, G(b) \leq Mf(b)$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante, on a alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et :

$$Mf'(x) \leq f'(x)\, G(x) \leq mf'(x)$$

qui donne par intégration :

$$M(f(b) - f(a)) \leq \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx \leq m(f(b) - f(a))$$

Il en résulte que :

$$mf(b) - m(f(b) - f(a)) \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq Mf(b) - M(f(b) - f(a))$$

soit :

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq Mf(a)$$

Si $f(a) = 0$, on a alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ et la formule est vérifiée pour tout $c \in [a,b]$, sinon on a $f(a) > 0$ et :

$$m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M,$$

ce qui entraîne l'existence de $c \in [a,b]$ tel que :

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = G(c)$$

(théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue G).

Remarque. Cette seconde formule de la moyenne est encore valable pour f, g continues par morceaux sur I, la fonction f étant décroissante à valeurs positives.

4.

(a) Pour tout $n \geq 1$ on désigne par f_n la fonction définie sur l'intervalle $I_n = [0, 1 - 1/n]$ par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

Si cette fonction ne s'annule jamais sur I_n, du fait de sa continuité, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle garde un signe constant sur cet intervalle. Supposons que $f_n(x) > 0$ pour tout $x \in I_n$. On a alors :

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0$$

ce qui contredit $f(0) = f(1)$. La fonction f_n s'annule donc au moins une fois sur I_n.

(b) Ce résultat n'est plus valable si on remplace $1/n$ par un réel α de l'intervalle $]0, 1[$ qui n'est pas l'inverse d'un entier. En effet, si f est la fonction définie et continue sur $[0, 1]$ par $f(x) = \cos(2\pi x/a) - \lambda x$, où λ est choisi tel que $f(0) = f(1)$ (prendre $\lambda = \cos(2\pi x/a) - 1$), alors pour tout réel $x \in [0, 1 - a]$, on a :

$$f(x + a) - f(x) = -\lambda a = a\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)\right) \neq 0$$

puisque $1/a$ n'est pas entier.

(c) Comme application, on peut montrer que si une voiture parcourt 100 km en une heure, il existe alors un intervalle de temps égal à une demi-heure pendant lequel la voiture a parcouru 50 km.
Pour ce faire, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = d(x) - 100x$ où $d(x)$ est le nombre de kilomètres parcourus en x heures.
Cette application est continue avec $f(0) = f(1) = 0$. Le résultat précédent, pour $n = 2$, nous dit qu'il existe $x_2 \in [0, 1/2]$ tel que $f(x_2) = f(x_2 + 1/2)$, soit $d(x_2 + 1/2) - d(x_2) = 50$ et l'intervalle de temps $[x_2, x_2 + 1/2]$ répond à la question.

– III – Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

1. Dire qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires revient à dire que pour tout intervalle J contenu dans I, $f(J)$ est un intervalle.
En considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}},$$
on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, ce qui prouve que f n'est pas continue en 0.
Si J est un intervalle réel ne contenant pas 0, alors f est continue sur J et $f(J)$ est un intervalle.
Si J est un intervalle contenant 0 et non réduit à un point (autrement $J = f(J) = \{0\}$), on considère alors les suites $(x_n)_{n\geq n_0}$, $(y_n)_{n\geq n_0}$, définies par
$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}},$$
où n_0 est un entier assez grand pour que ces suites soient à valeurs dans J, et on a $f(x_n) = 1$, $f(y_n) = -1$ pour tout $n \geq n_0$ et :
$$[-1,1] \supset f(J) \supset f([y_n, x_n]) \supset [-1,1],$$
c'est-à-dire que $f(J) = [-1,1]$.
En définitive, la fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

2.

(a) La fonction g est continue sur le compact $[a,b]$, elle est donc minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$.

(b) Si $c = a$ [resp. $c = b$], on a alors $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0$ [resp. $\frac{g(b)-g(x)}{b-x} \leq 0$] pour tout $x \in]a,b[$ et en passant à limite quand x tend vers a [resp. vers b] par valeurs supérieures [resp. inférieures], on déduit que $g'(a) \geq 0$ [resp. $g'(b) \leq 0$] ce qui est en contradiction avec $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 < g'(b) = f'(b) - \lambda$.

(c) On a donc $c \in]a,b[$ et $g'(c) = 0$, soit $f'(c) = \lambda$.

Remarque. Le théorème de Darboux montre qu'une fonction peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue en 0.

(d) Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$, elle doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires. Une fonction ne vérifiant pas cette propriété, par exemple une fonction en escaliers, n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires telle que $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout $y \in \mathbb{R}$ (si $y \notin f(I)$, on a alors $f^{-1}\{y\} = \emptyset$ qui est toujours fermé, sinon y s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$ comme proposé dans l'énoncé).
On se donne $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Les ensembles $F_1 = f^{-1}\{f(x_0) - \varepsilon\}$ et $F_2 = f^{-1}\{f(x_0) + \varepsilon\}$ sont des fermés (éventuellement vides) de I qui ne contiennent pas x_0, donc x_0 est dans l'ouvert :

$$\mathcal{O} = (I \setminus F_1) \cap (I \setminus F_2)$$

et il existe $\eta > 0$ tel que $J = I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset \mathcal{O}$. Pour tout $x \in J$ on a $f(x) \neq f(x_0) \pm \varepsilon$ et $f(J)$ est un intervalle qui contient $f(x_0)$, nécessairement $f(J) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. On a donc ainsi montré que f est continue en tout point de I.

Remarque. On peut affaiblir les hypothèses dans le résultat précédent en remplaçant l'hypothèse, $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout réel y, par $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout rationnel y.

PROBLEME N° 3. Quelques propriétés des polynômes de Laguerre

– I – Étude de la famille (L_n)

1. Pour tout entier naturel n, la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie la définition de L_n.
2. On a :

$$h_0(x) = e^{-x},\ L_0(x) = e^x h_0(x) = 1$$

$$h_1(x) = xe^{-x},\ L_1(x) = e^x h_1'(x) = 1 - x$$

$$h_2(x) = x^2 e^{-x},\ L_2(x) = \frac{e^x}{2} h_2''(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

3. L'instruction *xcas* suivante :

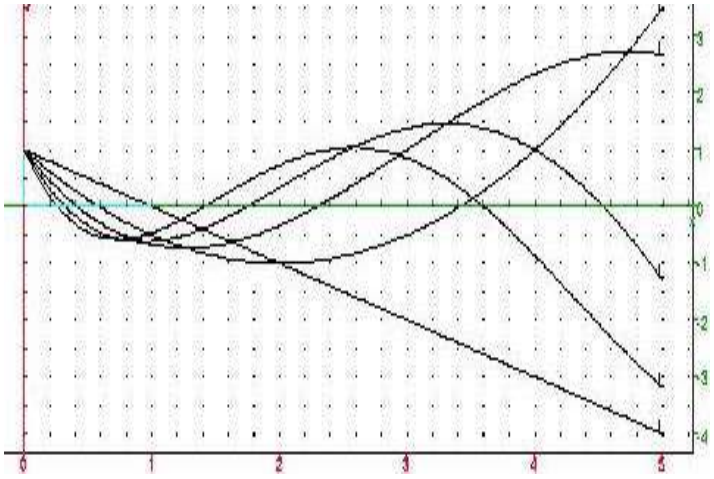
pour j de *1* jusque *5* faire afficher(laguerre(j,x,*0*)) ; fpour

nous donne les résultats :

$$1-x\,;\ \frac{1}{2}x^2-2x+1\,;\ -\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+1$$

$$\frac{1}{24}x^4-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x+1\,;\ -\frac{1}{120}x^5+\frac{5}{24}x^4-\frac{5}{3}x^3+5x^2-5x+1$$

et avec :
L :=[] ; for j from 1 to 5 do L :=append(L,plot(laguerre(j,x,0),x=0..5, couleur=noir)) ;od ; L ;
on obtient le graphique de la figure suivante :



En utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$h_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}e^{-x}$$

et :

$$\begin{aligned}L_n(x)&=\frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k!}x^k(-1)^k\end{aligned}$$

La fonction L_n est donc polynomiale de degré n et son coefficient dominant est $(-1)^n/n!$.

4.

(a) On a pour tout réel x :

$$h_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x) \text{ et } h_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right)$$

(b) Pour tout réel x, on a $h_{n+1}(x) = x \cdot h_n(x)$.

(c) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(x) - L_n(x) &= \frac{e^x}{(n+1)!}h_{n+1}^{(n+1)}(x) - \frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x) \\
&= \frac{e^x}{n!}\left(\frac{1}{n+1}(x \cdot h_n)^{(n+1)}(x) - h_n^{(n)}(x)\right) \\
&= \frac{e^x}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\left(x \cdot h_n^{(n+1)}(x) + (n+1)h_n^{(n)}(x)\right) - h_n^{(n)}(x)\right) \\
&= \frac{e^x}{n!}\left(\frac{1}{n+1}x \cdot h_n^{(n+1)}(x)\right) = \frac{e^x}{(n+1)!}x \cdot n!e^{-x}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right) \\
&= \frac{x}{n+1}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}L_n'(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x). \tag{3.1}$$

5. On a $h_{n+1}' = (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x} = (n+1)h_n - h_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} &= (n+1)h_n^{(n+1)} - h_{n+1}^{(n+1)} \\
&= (n+1)\left(n!e^{-x}\left(L_n' - L_n\right)\right) - (n+1)!e^{-x}L_{n+1} \\
&= (n+1)!e^{-x}\left(L_n' - L_n - L_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} &= \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)' = \left((n+1)!e^{-x}L_{n+1}\right)' \\
&= (n+1)!e^{-x}\left(L_{n+1}' - L_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $L_n' - L_n - L_{n+1} = L_{n+1}' - L_{n+1}$ soit :

$$L_{n+1}' = L_n' - L_n. \tag{3.2}$$

6.

(a) De (3.1), on déduit que :

$$\begin{aligned} L'_{n+1} &= \frac{1}{n+1}L'_n + \frac{X}{n+1}L''_n + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right)L'_n - \frac{1}{n+1}L_n \\ &= \frac{X}{n+1}\left(L''_n - L'_n\right) + \frac{1}{n+1}\left(L'_n - L_n\right) + L'_n \\ &= \frac{1}{n+1}\left(XL''_n + (n+2-X)\,L'_n - L_n\right) \end{aligned}$$

et avec (3.2), cela donne :

$$(n+1)\left(L'_n - L_n\right) = XL''_n + (n+2-X)\,L'_n - L_n$$

soit $XL''_n + (1-X)\,L'_n + nL_n = 0$.

(b) De (3.1), on déduit que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} (n+1)\,L_{n+1} = XL'_n + (n+1-X)\,L_n \\ nL_n = XL'_{n-1} + (n-X)\,L_{n-1} \end{cases}$$

et par soustraction :

$$\begin{aligned} (n+1)\,L_{n+1} - nL_n &= X\left(L'_n - L'_{n-1}\right) + (n+1-X)\,L_n - (n-X)\,L_{n-1} \\ &= X\,(-L_n) + (n+1-X)\,L_n - (n-X)\,L_{n-1} \\ &= (n+1-X)\,L_n - nL_{n-1} \end{aligned}$$

(en tenant compte de $L'_n - L'_{n-1} = -L_n$), soit :

$$(n+1)\,L_{n+1} + (X-2n-1)\,L_n + nL_{n-1} = 0.$$

– II – Application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. Vu en I.3.
2.

(a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et avec :

$$|f(x)| \leq |x|^{n+2} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0. Avec :

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|^{n+1} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

on déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
En fait, avec :

$$\left|\frac{f(x)}{x^{n+1}}\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

on déduit que $f(x) = o\left(x^{n+1}\right)$ au voisinage de 0, ce qui revient à dire que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de partie principale P_{n+1} égale au polynôme nul.
La dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ (n+2)\,x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1)\cos\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$ se prolonge par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = 1$, mais la fonction $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$ n'a pas de limite en 0 (la suite $(x_k) = \left(\sqrt[n+1]{\dfrac{1}{k\pi}}\right)$ converge vers 0 et $(g(x_k)) = (\cos(k\pi)) = \left((-1)^k\right)$ n'a pas de limite), donc la fonction f' n'a pas de limite en 0 et conséquence n'est pas continue, ce qui revient à dire que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 0 en 0.

(b) Dire qu'une fonction f, définie sur un voisinage $]-\alpha,\alpha[$ de 0 (avec $\alpha > 0$), admet un développement limité à l'ordre n en 0 signifie qu'il existe une fonction polynomiale P_n de degré au plus égal à n et une fonction ε définie sur $]-\alpha,\alpha[$ (mais non nécessairement dérivable) tels $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$.
Pour $n \geq 1$, f est dérivable en 0, mais n'admet pas nécessairement de dérivée seconde en ce point comme le montre l'exemple de la fonction définie par $f(x) = x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en 0, elle admet alors, au voisinage de 0, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

(théorème de Taylor-Young).
Pour $1 \leq k \leq n$, la fonction $f^{(n-k)}$ qui est définie sur un voisinage

de 0 est dérivable à l'ordre k en 0 et admet en ce point un développement limité à l'ordre k.
Pour $k = 0$, $f^{(n)}$ admet un développement limité à l'ordre 0, si on suppose de plus qu'elle est continue en 0.
Une condition qui nous suffira pour la suite est que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert de 0 ou qu'elle soit développable en série entière en 0.

3.

(a) La fonction h_n (produit d'un polynôme par une exponentielle) est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini. Précisément, on a pour tout réel x :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^{n+k}$$

et le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 :

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} x^{n+k} + o\left(x^{n+N}\right)$$

(b) Le rayon de convergence de la série entière définissant h_n étant infini, on peut dériver terme et on, pour tout réel x :

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} x^k$$

et le développement limité à l'ordre N en 0 :

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} x^k + o\left(x^N\right).$$

(c) En utilisant le théorème de Cauchy sur le produit de deux séries entières de rayon de convergence infini, on a :

$$\begin{aligned} L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+k}{k} x^k \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p \end{aligned}$$

avec, pour tout entier naturel p :

$$c_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+k}{k} \frac{1}{(p-k)!} = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}$$

et :

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o\left(x^N\right).$$

(d) Comme L_n est un polynôme de degré n, on a nécessairement $c_p = 0$ pour tout $p > n$, ce qui équivaut à $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = 0$.
Pour $0 \leq p \leq n$, les c_p sont les coefficients de L_n calculés en **I.3** soit :

$$c_p = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \frac{\binom{n}{p}}{p!} (-1)^p$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = (-1)^p \binom{n}{p}.$$

– III – Étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+x^2\right) P(x) e^{-x} = 0$$

la fonction $x \mapsto \left(1+x^2\right) P(x) e^{-x}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que cette fonction est majorée et il existe une constant $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \left(1+x^2\right) |P(x)| e^{-x} \leq M$$

ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ |P(x)| e^{-x} \leq \frac{M}{1+x^2}$$

et avec la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x) e^{-x} dx$ est absolument convergente. L'application φ est donc bien définie.

2. De la linéarité de l'intégrale et de la bilinéarité de l'application $(P,Q) \mapsto PQe^{-x}$, on déduit que φ est bilinéaire. La multiplication sur $\mathbb{R}$ étant commutative, φ est symétrique.
La positivité de φ se déduit de la positivité de l'intégrale.
Enfin si $P \in \mathbb{R}[X]$ est telle que

$$\varphi(P,P) = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx = 0,$$

on en déduit que $(P(x))^2 e^{-x} = 0$ pour tout réel positif x puisque cette fonction est continue à valeurs positives, donc $(P(x))^2 = 0$ pour tout réel positif x puisque $e^{-x} \neq 0$ pour tout réel x. On a donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $P = 0$ puisque c'est une fonction polynomiale.
L'application φ est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire un produit scalaire.

3. On a :

$$\varphi(L_0, X^n) = \int_0^{+\infty} L_0(x)\, x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

comme il est bien connu. Cela se vérifie par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{X \to +\infty} \left(1 - e^{-X}\right) = 1.$$

Supposant le résultat acquis pour $n \geq 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X x^{n+1} e^{-x} dx$$

et une intégration par parties nous donne, pour tout $X > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^X x^{n+1} e^{-x} dx &= \left[-x^{n+1} e^{-x}\right]_0^X + (n+1) \int_0^X x^n e^{-x} dx \\ &= X^{n+1} e^{-X} + (n+1) \int_0^X x^n e^{-x} dx \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en faisant tendre X vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (n+1)!.$$

4.

(a) En utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned} h_n^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} (-1)^{k-j} e^{-x} \\ &= x^{n-k} e^{-x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} x^{k-j} (-1)^{k-j} \\ &= x^{n-k} e^{-x} Q_k(x) \end{aligned}$$

le polynôme Q_k étant de degré k.

(b) On a :

$$\varphi(L_n, P) = \int_0^{+\infty} L_n(x) P(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(x) P(x) dx$$

soit le résultat annoncé pour $p = 0$.
Supposons le résultat acquis pour p compris entre 0 et $n-1$, en supposant $n \geq 1$ (pour $n = 0$, c'est terminé avec $p = 0$). Une intégration par parties nous donne pour tout réel $X > 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^X h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx \\ &\quad = \left[h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p)}(x) \right]_0^X - \int_0^X h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx \\ &\quad = X^{p+1} e^{-X} Q_k(X) - \int_0^X h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx \end{aligned}$$

et faisant tendre X vers l'infini, on aboutit à :

$$\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx = -\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx$$

ce qui nous donne :

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^{p+1}}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx$$

soit le résultat attendu pour $p+1$.

5. Du résultat précédent, on déduit que pour tout entier $n \geq 1$ et tout polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a :

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) P^{(n)}(x)\, dx = 0$$

(on a $P^{(n)} = 0$ pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$).
Comme chaque polynôme L_k est de degré k, on obtient $\varphi(L_n, L_k) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$. La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale dans $(\mathbb{R}[X], \varphi)$. Avec :

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) L_n^{(n)}(x)\, dx$$

et $L_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} n!$, on déduit que :

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = 1.$$

La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthonormée dans $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Deuxième partie

ECRITS 2

Chapitre 4

CAPES externe 2009, épreuve 2

4.1 Énoncé

Notations et présentation du sujet

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a < b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X] \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Il se compose de quatre parties. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines du polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent

[0] [ag77e] v1.02

au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \text{Max}\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, ..., 1 + |a_{n-1}|\}.$$

1) **Exemple numérique**

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i$, $a_1 = -3 - 5i$, $a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$

1.1) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

1.2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

1.3) Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \text{Max}\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2) **Étude du cas général**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r_i\}.$$

2.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = {}^t(v_1, ..., v_n)$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1.a) Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leq r_i \underset{k \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} \{|v_k|\}.$$

2.1.b) En déduire que : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

2.2) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associée la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P, et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \quad \text{si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det\left(M_P - zI_n\right) = (-1)^n P\left(z\right)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

2.2.b) En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \text{Max}\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, ..., 1 + |a_{n-1}|\}.$$

Partie B : La borne de Cauchy

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1) **Un résultat préliminaire**

Soient $(c_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H\left(X\right) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction h par :

$$h\left(x\right) = -\frac{H\left(x\right)}{x^n}.$$

1.1) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

1.3) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k.$$

1.4) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

2) **Une application**

On considère un entier $m \geq 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que a_i soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. On pose $\gamma = \underset{k\in[\![1,m-1]\!]}{\text{Max}} \{\frac{a_{i-1}}{a_i}\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

2.1) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X-\gamma)F(X)$, montrer que $|\zeta| \leq \gamma$.

2.2) On pose $\gamma' = \underset{k\in[\![1,m-1]\!]}{\text{Min}} \{\frac{a_{i-1}}{a_i}\}$. Montrer que $\gamma' \leq |\zeta|$.

3) **La borne de Cauchy**

Soit $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

3.1) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive. Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

3.2) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a $|\zeta| \leq \rho(f)$.

3.3) Soit $(\zeta_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec $0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq ... \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$.

3.3.a) Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3.3.b) En déduire que :

$$\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}.$$

3.3.c) En déduire que : $(\sqrt[n]{2} - 1)\rho(f) \leq |\zeta_n|$.

3.3.d) On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose

$$g(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}.$$

On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{(\sqrt[n]{2}-1)\rho(g)}.$$

3.4) En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1) de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 3.2), et 3.3.c).

4) **Un raffinement de la borne de Cauchy**

On considère toujours $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls. On pose

$$f_1(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k.$$

On se propose de montrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq \rho(f_1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq \rho(f_1)\right\}$$

et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

4.1) Montrer que $\rho(f_1) \leq \rho(f)$.

4.2) Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\,\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1).$$

4.3) Conclure.

Partie C : Un théorème de Lucas

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si pour tout couple (A, B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est-à-dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0,1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à Γ. (En particulier, l'ensemble vide est convexe.)

1) **Préliminaires**

1.1) Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma.$$

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée *l'enveloppe convexe* de P.

1.2) Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

2) Soit $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé. Soit $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

2.1) Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à l'ensemble $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$, on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{z - r_j}.$$

2.2) Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2, ..., M_m d'affixes respectives r_1, r_2, ..., r_m.

2.3) Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ (*Théorème de Lucas*).

2.4) Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1) de la partie A.

Partie D : Théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

$\Diamond$ des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral,

$\Diamond$ du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$ s'il est équilatéral.

1) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1.1) Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω.

1.2) Conclure.

2) **Une propriété de la tangente à l'ellipse**

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$. On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a.$$

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t) \in (\mathcal{E})$, on note $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)\,F})$ un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ et on pose

$$\overrightarrow{u}(t) = \frac{1}{M(t)\,F}\overrightarrow{M(t)\,F} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}(t) = \frac{1}{M(t)\,F'}\overrightarrow{M(t)\,F'}.$$

2.1) Montrer que :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)\,F}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)\,F'}).$$

2.2) Montrer que le produit scalaire $(\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t)) \cdot \overrightarrow{\tau}(t)$ est nul.

2.3) En déduire que la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F),(M(t)F'))$.

3) **Un théorème de Poncelet**

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (c'est à dire un point P tel que $PF+PF'>2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à $(\mathcal{E})$ et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

3.1) Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1). Montrer que $F'F_1=2a$.

3.2) On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2). Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

3.3) On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1),(PF))$ et $((PF'),(PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note $\mathcal{S}_D$ la réflexion d'axe D.

3.3.a) Déterminer $\mathcal{S}_{(PF)}\circ\mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PF)}\circ\mathcal{S}_{(PT_1)}$.

3.3.b) Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PT_2)}\circ\mathcal{S}_{(PF')}$ et conclure.

4) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral**

Soit $f(X)=(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)\in\mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral.
On note w et w' (avec $w\neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w'.

4.1) Justifier qu'il existe une ellipse $(\mathcal{E})$ de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1M_2]$.

4.2)

4.2.a) Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité :

$$3(X-w)\big(X-w'\big)=(X-r_1)(X-r_2)+(X-r_2)(X-r_3)+(X-r_3)(X-r_1).$$

4.2.b) En déduire que :

$$12\ \frac{w-\dfrac{r_1+r_2}{2}}{r_1-r_2}=\frac{r_2-r_1}{w'-\dfrac{r_1+r_2}{2}}$$

puis que la droite (M_1M_2) est tangente à $(\mathcal{E})$.

4.3)

4.3.a) Montrer que :

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3\,\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}.$$

4.3.b) En déduire que (M_1M_3) est la deuxième tangente à $(\mathcal{E})$ issue de M_1.

4.4) Conclure.

4.2 Corrigé

Partie A : Une majoration des modules des racines d'un polynôme

A.1.1. Si x est une racine réelle de $p(X)$,

$$p(x) = x^3 + (-2+3i)\,x^2 + (-3-5i)\,x + 6 - 2i = 0$$

donc

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \quad (*) \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0. \end{cases}$$

Par suite $x^2 = \dfrac{1}{3}(5x+2)$ et

$$x^3 = \frac{1}{3}\left(5x^2 + 2x\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}(5x+2) + 2x\right) = \frac{1}{9}(31x+10).$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{gathered} \frac{1}{9}(31x+10) - \frac{2}{3}(5x+2) - 3x + 6 = 0 \\ 31x + 10 - 30x - 12 - 27x + 54 = 0 \\ -26x + 52 = 0 \\ x = 2. \end{gathered}$$

Cela montre que la seule racine réelle possible de $p(X)$ est 2. Pour conclure, on vérifie que $p(2) = 0$, et donc que 2 est bien une racine de $p(X)$.

[0] [ag77] v1.01, correction de D.-J. Mercier.

A.1.2. Le discriminant de l'équation $(E) : z^2 + 3iz - 3 + i = 0$ est

$$\Delta = -9 - 4(-3 + i) = 3 - 4i.$$

Les racines de (E) seront

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

où $\sqrt{\Delta}$ désigne l'une des racines carrées de Δ. Cherchons ces racines carrées. On a

$$\Delta = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = -2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2\left(-b^2\right) = -4. \end{cases}$$

Les réels a^2 et $-b^2$ sont ainsi les racines du trinôme $t(x) = x^2 - 3x - 4$. On a $t(x) = (x - 4)(x + 1)$, donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$. Comme $ab = -2$ est négatif, on obtient $a = \pm 2$ et $b = \mp 1$. On peut donc prendre $\sqrt{\Delta} = 2 - i$, et les racines de (E) seront

$$z_1 = \frac{1}{2}(-3i + (2 - i)) = 1 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2}(-3i - (2 - i)) = -1 - i.$$

Remarque : On peut aussi déduire $a + ib$ du système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2\left(-b^2\right) = -4 \\ a^2 + b^2 = |\Delta|^2 = 5. \end{cases}$$

A.1.3. On a $|a_0| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \simeq 6,3$, $|a_1| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \simeq 5,8$ et $|a_2| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \simeq 3,6$, donc $R = 1 + \sqrt{34} \simeq 6,8$. Comme

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 2)(x - z_1)(x - z_2) \\ &= (x - 2)(x - (1 - 2i))(x - (-1 - i)), \end{aligned}$$

les racines de $p(X)$ sont de modules 2, $|z_1| = \sqrt{5}$ et $|z_2| = \sqrt{2}$ qui sont bien des nombres inférieurs à R.

A.2.1.a. On a $AV = \lambda V$ donc

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k = \lambda v_i.$$

Ainsi, pour tout i,

$$|\lambda v_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\right) \times \underset{k\in\{1,\ldots,n\}}{\text{Max}}\{|v_k|\} = r_i \underset{k\in\{1,\ldots,n\}}{\text{Max}}\{|v_k|\}.$$

A.2.1.b. Si t désigne un indice tel que $|v_t| = \text{Max}_{k\in\{1,\ldots,n\}}\{|v_k|\}$, on obtient

$$|\lambda v_t| \leq r_t \times |v_t|$$

d'où $|\lambda| \leq r_t$ en divisant par $|v_t|$ (qui n'est pas nul, autrement V serait nul et ne serait pas un vecteur propre de A). Il existe ainsi un indice t tel que $\lambda \in D_t$, donc $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

A.2.2.a. Posons $\chi_{M_P}(z) = \det(M_P - zI)$, et raisonnons par récurrence sur n. La propriété est triviale si $n = 2$ car

$$\chi_{M_P}(z) = \begin{vmatrix} -z & -a_0 \\ 1 & -a_1 - z \end{vmatrix} = z^2 + a_1 z + a_0 = P(z).$$

An rang n, on calcule $\chi_{M_P}(z)$ en développant le déterminant suivant la première ligne. On obtient

$$\begin{aligned}\chi_{M_P}(z) &= \begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -z & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -z & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - z \end{vmatrix} \\ &= (-z)\,\chi_{M_Q}(z) + (-1)^{n+1}(-a_0)\end{aligned}$$

où $Q(z) = z^{n-1} + a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + a_2 z + a_1$. La propriété au rang $n-1$ donne $\chi_{M_Q}(z) = (-1)^{n-1} Q(z)$, d'où

$$\begin{aligned}\chi_{M_P}(z) &= (-z)(-1)^{n-1}\left(z^{n-1} + a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + a_1\right) + (-1)^{n+1}(-a_0) \\ &= (-1)^n\left(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\right) \\ &= (-1)^n P(z).\end{aligned}$$

• **Autre solution** : On note l_i la i-ième ligne de la matrice $M_P - zI$. En

remplaçant l_1 par la combinaison linéaire $l_1+zl_2+z^2l_2+...+z^{n-1}l_n$, on obtient

$$\chi_{M_P}(z) = \begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -z & & & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -z & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -P(z) \\ 1 & -z & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -z & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}-z \end{vmatrix}.$$

Il suffit maintenant de développer le déterminant suivant la première ligne pour obtenir :

$$\chi_{M_P}(z) = (-1)^{n+1}(-P(z)) \begin{vmatrix} 1 & -z & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -z \\ 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n P(z).$$

A.2.2.b. Les racines de $P(X)$ sont les valeurs propres de M_P. On applique la question (A.2.1) : si λ est une racine de $P(X)$, alors $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donc

$$|\lambda| \leq \text{Max}\{r_1, ..., r_n\} = \text{Max}\{|a_0|, 1+|a_1|, ..., 1+|a_{n-1}|\}.$$

Partie B : La borne de Cauchy

B.1.1. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n} = -1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + ... + \frac{c_0}{x^n}.$$

Comme tous les c_k sont positifs les fonctions $x \mapsto c_{n-k}/x^k$ qui apparaissent dans cette somme sont toutes décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme l'un des c_k est strictement positif, on peut même dire que l'une des fonctions $x \mapsto c_{n-k}/x^k$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $h(x)$, somme d'une fonction

constante (prenant toujours la valeurs -1) et de plusieurs fonctions décroissantes (dont l'une est strictement décroissante) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

B.1.2. • On a $\lim_{x\to 0_+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -1$. Comme h est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$, une adaptation classique du théorème des valeurs intermédiaires montre que h admet au moins un zéro α sur $\mathbb{R}_+^*$. La décroissance stricte de h sur $\mathbb{R}_+^*$ montre que ce zéro est unique (h induisant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]-1,+\infty[$).
Comme $h(x) = -H(x)/x^n$ et $H(x)$ admettent les mêmes zéros sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que H admet une unique racine réelle strictement positive.

• Montrons que α est une racine simple de H en raisonnant par l'absurde. S'il en était autrement, on aurait $H(\alpha) = H'(\alpha) = 0$, soit

$$\begin{cases} \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k\alpha^k = 0 \\ n\alpha^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} kc_k\alpha^{k-1} = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} n\alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} nc_k\alpha^k = 0 \\ n\alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} kc_k\alpha^k = 0. \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)c_k\alpha^k = 0.$$

Comme tous les termes de cette dernière somme sont positifs, on en déduit que $(n-k)c_k\alpha^k = 0$ pour tout k. Mais $n-k$ et α^k ne sont jamais nuls, et l'un des c_k est strictement positif, donc l'un des termes de la somme sera strictement positif, ce qui est absurde.

B.1.3. Comme h est strictement décroissante,

$$|\zeta| > \alpha \;\Rightarrow\; h(|\zeta|) < h(\alpha) \;\Rightarrow\; -\frac{H(|\zeta|)}{|\zeta|^n} < -\frac{H(\alpha)}{\alpha^n} \;\Rightarrow\; H(|\zeta|) > 0,$$

et cette dernière inégalité s'écrit $|\zeta|^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k|\zeta|^k > 0$, soit

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k|\zeta|^k. \quad (\flat)$$

B.1.4. Raisonnons par l'absurde. S'il existait une racine ζ de $H(X)$ de module $> \alpha$, la question précédente montrerait l'inégalité ($\flat$). Mais on aurait aussi $H(\zeta) = \zeta^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k\zeta^k = 0$, donc

$$|\zeta|^n \le \sum_{k=0}^{n-1} c_k|\zeta|^k \quad (\natural)$$

en utilisant l'inégalité triangulaire. (♭) et (♮) se contredisent.

B.2.1. On a

$$\begin{aligned} F_\gamma(X) = (X-\gamma)F(X) &= (X-\gamma)\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \gamma a_k X^k \\ &= a_{m-1}X^m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k-1} - \gamma a_k) X^k - \gamma a_0. \end{aligned}$$

Le polynôme

$$H(X) = \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(X) = X^m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{k-1} - \gamma a_k}{a_{m-1}} X^k - \gamma \frac{a_0}{a_{m-1}}$$

vérifie les hypothèses de la question (B.1). En effet, il est unitaire, et tous les coefficients de ses monômes de degré $< m$ sont négatifs et non tous nuls. La vérification est facile et utilise que tous les a_i sont strictement positifs. Ainsi $\gamma \frac{a_0}{a_{m-1}} > 0$, et pour tout $k \in \{1, ..., m-1\}$,

$$\frac{a_{k-1} - \gamma a_k}{a_{m-1}} \leq 0$$

puisque cela s'écrit $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \gamma$, ce qui est vrai par la définition même de γ.
D'après (B.1), $H(X) = \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(X)$ admet une unique racine strictement positive, c'est γ, et toutes ses racines sont de modules $\leq \gamma$. Mais les racines ζ de $F(X)$ sont aussi des racines de $H(X)$, donc, si l'on note de façon générale $\mathrm{Rac}(P)$ l'ensemble des racines d'un polynôme $P(X)$,

$$\forall \zeta \in \mathrm{Rac}(F) \quad |\zeta| \leq \gamma.$$

B.2.2. On applique la question (B.2.1) au polynôme

$$G(X) = X^{m-1} F\left(\frac{1}{X}\right) = a_{m-1} + a_{m-2}X + ... + a_1 X^{m-2} + a_0 X^{m-1}$$

dont tous les coefficients sont bien strictement positifs. On obtient

$$\forall \xi \in \mathrm{Rac}(G) \quad |\xi| \leq \max_{i \in \{1,...,m-1\}} \left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\} = \frac{1}{\min\limits_{i \in \{1,...,m-1\}} \left\{\frac{a_{i-1}}{a_i}\right\}} = \frac{1}{\gamma'}.$$

Comme

$$\xi \in \mathrm{Rac}\,(G) \;\Leftrightarrow\; \xi^{m-1} F\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi = 0 \text{ ou } F\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0$$

et comme 0 n'est jamais racine de G (le coefficient constant a_{m-1} de G n'est pas nul), on obtient

$$\xi \in \mathrm{Rac}\,(G) \;\Leftrightarrow\; F\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi \in \left\{\frac{1}{\zeta} \,/\, \zeta \in \mathrm{Rac}\,(F)\right\}$$

soit $\mathrm{Rac}\,(G) = \left\{\frac{1}{\zeta} \,/\, \zeta \in \mathrm{Rac}\,(F)\right\}$. Les racines de G sont les inverses des racines de F. Pour toute racine ζ de F on aura donc

$$\left|\frac{1}{\zeta}\right| \leq \frac{1}{\gamma'}$$

c'est-à-dire $\gamma' \leq |\zeta|$.

B.3.1. L'équation $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$ s'écrit $H\,(x) = 0$ en posant

$$H\,(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k,$$

et la question (B.1) appliquée à ce polynôme $H\,(X)$ montre qu'il existe une unique solution réelle strictement positive de l'équation $H\,(x) = 0$.

B.3.2. Si $\zeta = 0$, l'inégalité à vérifier est triviale puisque $\rho\,(f)$ est positif.
Si $\zeta \neq 0$,

$$\begin{aligned} f\,(\zeta) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_n \zeta^n &= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k \\ \Rightarrow\; |a_n|\,|\zeta|^n &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|\zeta|^k \\ \Rightarrow\; H\,(|\zeta|) \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad h(|\zeta|) = -\frac{H\,(|\zeta|)}{|\zeta|^n} \geq 0. \end{aligned}$$

Comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en $\rho\,(f)$, l'inégalité $h(|\zeta|) \geq 0$ entraîne $|\zeta| \leq \rho\,(f)$.

B.3.3.a. On a

$$f\,(X) = a_n\,(X - \zeta_1)\,...\,(X - \zeta_n) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0. \quad (*)$$

Si $\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \zeta_{i_1}\zeta_{i_2}...\zeta_{i_k}$ désigne la k-ième fonction symétrique élémentaire des racines de f, on sait que pour tout $k \in \{1,...,n\}$,

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

(relations entre coefficients et racines d'un polynôme). Par conséquent

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| = |\sigma_{n-k}| \leq \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-k}\leq n} \left|\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}...\zeta_{i_{n-k}}\right| \leq \binom{n}{n-k} |\zeta_n|^{n-k}$$

(puisque la somme σ_{n-k} comporte $\binom{n}{n-k}$ termes). Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on obtient bien

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

pour tout $k \in \{1,...,n\}$. Si $k = 0$, il suffit de faire $X = 0$ dans $(*)$ pour obtenir $a_n (-1)^n \zeta_1...\zeta_n = a_0$, d'où $\left|\frac{a_0}{a_n}\right| = |\zeta_1...\zeta_n| \leq |\zeta_n|^n$, et l'inégalité est encore satisfaite.

B.3.3.b. On déduit :

$$\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \rho(f)^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}.$$

B.3.3.c.

$$\begin{aligned}
(\sqrt[n]{2}-1)\rho(f) \leq |\zeta_n| &\Leftrightarrow \sqrt[n]{2}\rho(f) \leq \rho(f) + |\zeta_n| \\
&\Leftrightarrow 2\rho(f)^n \leq (\rho(f) + |\zeta_n|)^n \\
&\Leftrightarrow 2\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k} \\
&\Leftrightarrow \rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}
\end{aligned}$$

et la dernière inégalité écrite est celle démontrée à la question précédente.

B.3.3.d. On a

$$g(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}.$$

Comme 0 n'est pas racine de $f(X)$, ni racine de $g(X)$ (car $g(0) = a_n \neq 0$),

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0,$$

autrement dit $\mathrm{Rac}\,(g) = \{\frac{1}{\zeta} \,/\, \zeta \in \mathrm{Rac}\,(f)\}$.

Appliquons (B.3.2) avec g. On obtient :

$$\forall \xi \in \mathrm{Rac}\,(g) \quad |\xi| \leq \rho\,(g)$$

soit

$$\forall \zeta \in \mathrm{Rac}\,(f) \quad \frac{1}{|\zeta|} \leq \rho\,(g) \qquad (*)$$

Appliquons (B.3.3.c) avec g. On obtient :

$$(\sqrt[n]{2} - 1)\rho\,(g) \leq \left|\frac{1}{\zeta_1}\right|. \qquad (**)$$

$(*)$ et $(**)$ donnent bien :

$$\frac{1}{\rho\,(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{(\sqrt[n]{2} - 1)\rho\,(g)}.$$

B.3.4. En reprenant le polynôme $p\,(X)$ de la question (A.1), on obtient $\mathrm{Rac}\,(p) = \{-1 - i, 1 - 2i, 2\}$ donc

$$\begin{cases} \zeta_1 = -1 - i & \text{de module } |\zeta_1| = \sqrt{2} \\ \zeta_2 = 1 - 2i & \text{de module } |\zeta_2| = \sqrt{5} \\ \zeta_3 = 2 & \text{de module } |\zeta_3| = 2. \end{cases}$$

En notant toujours $p\,(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, on avait déjà calculé $|a_0| = 2\sqrt{10}$, $|a_1| = \sqrt{34}$ et $|a_2| = \sqrt{13}$. La borne de Cauchy $\rho\,(p)$ de $p\,(X)$ est donc l'unique solution réelle strictement positive de l'équation :

$$|a_2|\,x^2 + |a_1|\,x + |a_0| = x^3$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{13}x^2 + \sqrt{34}x + 2\sqrt{10} = x^3.$$

Un logiciel de calcul formel nous donne l'approximation $\rho\,(p) \simeq 5,018$. On vérifie alors les résultats

$$|\zeta_3| \leq \rho\,(f) \quad \text{et} \quad (\sqrt[3]{2} - 1)\rho\,(f) \leq |\zeta_3|$$

obtenus aux questions (A.3.2) et (A.3.3.c) :

- ▷ $|\zeta_3| \leq \rho\,(f)$ équivaut à $2 \leq 5,018\,5$, ce qui est vrai.
- ▷ $(\sqrt[3]{2} - 1)\rho\,(f) \simeq 1,304$ est bien inférieur à $|\zeta_3| = 2$.

Tout va donc pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles.

B.4.1. On se replace dans le contexte de la question (B.1).

▷ $\rho(f_1)$ est l'unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$ de

$$H_1(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-2} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| x^k.$$

▷ $\rho(f)$ est l'unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$ de

$$H(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| x^k = H_1(x) - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| x^{n-1}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons comme en (B.1) :

$$h_1(x) = -\frac{H_1(x)}{x^n} \quad \text{et} \quad h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}.$$

On a

$$h(x) = -\frac{H_1(x)}{x^n} + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{x} = h_1(x) + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{x}.$$

Comme $h_1(\rho(f_1)) = 0$,

$$h(\rho(f_1)) = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{\rho(f_1)} \geq 0, \quad (*)$$

et comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en $\rho(f)$, $(*)$ impose d'avoir $\rho(f_1) \leq \rho(f)$.

B.4.2. Par hypothèse $\zeta \in \mathrm{Rac}(f)$ et $|\zeta| > \rho(f_1)$. Donc

$$f(\zeta) = a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k\zeta^k = 0$$

$$-(a_{n-1} + a_n\zeta)\zeta^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k\zeta^k$$

et

$$|a_{n-1} + a_n\zeta|\,|\zeta|^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\,|\zeta|^k.$$

Ainsi

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{|\zeta|^{n-(k+1)}} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{\rho(f_1)^{n-(k+1)}}$$

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \rho(f_1)^k = |a_n| \rho(f_1).$$

B.4.3. D'après la question précédente, un racine ζ de f qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_0$ vérifie $|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq |a_n|\rho(f_1)$, ce qui s'écrit

$$\left|\zeta + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq \rho(f_1),$$

donc appartient à $\mathcal{D}_1$. On peut donc affirmer que toutes les racines de f appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$.

Partie C : Un théorème de Lucas

C.1.1. Il s'agit de montrer que :

(a) $\mathcal{E}(P)$ est convexe,

(b) $\mathcal{E}(P)$ contient P,

(c) Si W est un convexe qui contient P, alors il contient $\mathcal{E}(P)$.

Preuve de (a) : $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$ est convexe car une intersection quelconque de convexes est toujours convexe. En effet, si les parties Γ_i $(i \in I)$ sont convexes, alors, pour tout i, quels que soient A et B appartenant à Γ_i, le segment $[AB]$ est inclus dans Γ_i. Autrement dit

$$\forall A, B \in \Gamma_i \quad \forall i \in I \quad [AB] \subset \Gamma_i$$

et donc

$$\forall A, B \in \Gamma_i \quad [AB] \subset \bigcap_{i \in I} \Gamma_i,$$

ce qui signifie que l'intersection $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ est convexe.

Preuve de (b) : On a $P \subset \Gamma$ pour tout Γ appartenant à la famille E, donc $P \subset \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma = \mathcal{E}(P)$.

Preuve de (c) : Si W est un convexe qui contient P, il appartient à la famille E, donc contient $\mathcal{E}(P)$, autrement dit : $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma \subset W$.

C.1.2. Il s'agit de montrer que $\mathcal{B}$ est le plus petit convexe de $\mathcal{P}$ contenant P, autrement dit que :

(a) $\mathcal{B}$ est convexe,

(b) $\mathcal{B}$ contient P,

(c) Si $\mathcal{C}$ est un convexe qui contient P, alors il contient $\mathcal{B}$.

Preuve de (a) : Soient M et N appartenant à $\mathcal{B}$. M et N sont des barycentres à coefficients positifs de certains points de P, donc $\overrightarrow{OM} = \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{ON} = \sum_{i\in J} \beta_i \overrightarrow{OB_i}$ où les A_i, B_i appartiennent à P, où les α_i, β_i sont des réels positifs tels que $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{i\in J} \beta_i = 1$, et où O est un point de l'espace affine fixé une fois pour toutes.
Je peux supposer que $I = J$ et $A_i = B_i$ pour tout $i \in I$ quitte à introduire des coefficients supplémentaires α_i et β_i nuls. Si $P \in [MN]$, il existe $t \in [0,1]$ tel que P soit barycentre de $M(t)$, $N(1-t)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{ON} \\ &= t\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + (1-t)\sum_{i\in I} \beta_i \overrightarrow{OA_i} \\ &= \sum_{i\in I} (t\alpha_i + (1-t)\beta_i)\overrightarrow{OA_i}.\end{aligned}$$

Cela montre que P est le barycentre des A_i affectés des coefficients positifs $t\alpha_i + (1-t)\beta_i$, et donc que $P \in \mathcal{B}$.

Preuve de (b) : Tout point A de P est barycentre du système formé par l'unique point A affecté du coefficient positif 1, donc $A \in \mathcal{B}$. Ainsi $P \subset \mathcal{B}$.

Preuve de (c) : Si $\mathcal{C}$ est un convexe contenant P, montrons qu'il contient $\mathcal{B}$. Pour cela il suffit de montrer la propriété suivante par récurrence sur k :

> $H(k)$: "Tout barycentre à coefficients positifs de moins de k points de P appartient à $\mathcal{C}$."

La propriété $H(1)$ est trivialement vérifiée. La propriété $H(2)$ est vraie puisque le barycentre à coefficient positifs de deux points de $\mathcal{C}$ est encore dans $\mathcal{C}$ (par convexité de $\mathcal{C}$).
Supposons que la propriété soit vraie au rang k et montrons-la au rang $k+1$. Soit M un barycentre de $k+1$ points A_i de P $(1 \leq i \leq k+1)$ affectés des coefficients positifs α_i tels que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$.
Si l'un des α_i est nul, alors $M \in \mathcal{C}$ d'après l'hypothèse récurrente au rang k. On peut donc supposer maintenant que tous les coefficients α_i sont strictement positifs. Dans ce cas $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$, et l'associativité du barycentre montre que M est le barycentre de $g(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)$, $A_{k+1}(\alpha_{k+1})$ où g est le barycentre de $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_k(\alpha_k)$. Par hypothèse récurrente $g \in \mathcal{C}$, et comme $\mathcal{C}$ est convexe et $A_{k+1} \in \mathcal{C}$, on en déduit $M \in \mathcal{C}$.

C.2.1. On a $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n (X - r_1)^{\alpha_1} ... (X - r_m)^{\alpha_m}$.

Pour tout $z \notin \{r_1, ..., r_m\}$, en utilisant la formule donnant la fonction dérivée d'un produit de fonctions, on trouve

$$f'(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_n \alpha_j (z - r_1)^{\alpha_1} ... (z - r_m)^{\alpha_m}}{(z - r_j)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{(z - r_j)} f(z)$$

donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{(z - r_j)}.$$

C.2.2. Faisons $z = r$ dans la formule ci-dessus. Comme $f'(r) = 0$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{(r - r_j)} = 0, \quad \text{soit} \ \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (\overline{r - r_j}) = 0,$$

et en prenant le conjugué des deux membres,

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

puisque les coefficients α_j et les termes $|z - r_j|^2$ sont réels. Cette égalité entre affixes se traduit vectoriellement par

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} \overrightarrow{M_j M} = \overrightarrow{0}$$

ce qui signifie que M est le barycentre des points M_j affectés des coefficients positifs $\alpha_j / |r - r_j|^2$ $(1 \leq j \leq m)$.

C.2.3. Soit M un point d'affixe une racine r de $f'(X)$. Si $r \in \{r_1, ..., r_m\}$, M est un point M_i, donc appartient à l'enveloppe convexe $\text{Conv}(M_1, ..., M_m)$ de $\{M_1, ..., M_m\}$. Si $r \notin \{r_1, ..., r_m\}$, nous venons de montrer que M est un barycentre à coefficients positifs des points M_j : c'est donc un point de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(M_1, ..., M_m)$.

C.2.4. Ici $p(X) = X^3 + (-2 + 3i) X^2 + (-3 - 5i) X + 6 - 2i$ et les racines de $p(X)$ sont $r_1 = -1 - i$, $r_2 = 1 - 2i$ et $r_3 = 2$. On a

$$p'(X) = 3X^2 + 2(-2 + 3i) X + (-3 - 5i).$$

Le discriminant réduit de $p'(X)$ est $\Delta' = (-2 + 3i)^2 - 3(-3 - 5i) = 4 + 3i$, et l'on peut prendre

$$\sqrt{\Delta'} = \frac{(3 + i)\sqrt{2}}{2}.$$

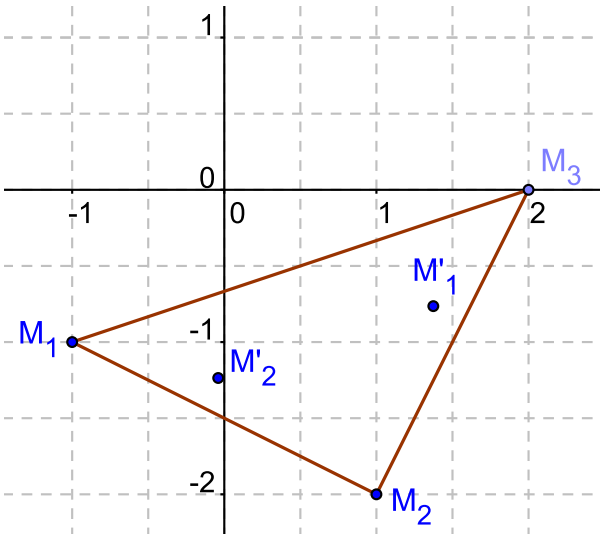


FIG. 4.1 – Illustration de la question C.2.4

Les racines de $p'(X)$ sont $\dfrac{-(-2+3i) \pm \sqrt{\Delta'}}{3}$, soit

$$\begin{cases} r'_1 = \dfrac{1}{6}\left(4 + 3\sqrt{2} + i\left(-6 + \sqrt{2}\right)\right) \simeq 1,374 - 0,764\,i \\ \text{et} \\ r'_2 = \dfrac{1}{6}\left(4 - 3\sqrt{2} + i\left(-6 - \sqrt{2}\right)\right) \simeq -0,040 - 1,236\,i. \end{cases}$$

Le théorème de Lucas exprime que les points d'affixes r'_1 et r'_2 appartiennent à l'intérieur du triangle de sommets les points d'affixes r_1, r_2, r_3, ce que l'on peut vérifier sur la FIG. 4.1.

Partie D : Théorème de Lucas et polynômes de degré 3

D.1.1. On a

$$\begin{aligned} f(X) &= (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \\ &= X^3 - (r_1 + r_2 + r_3)X^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)X - r_1r_2r_3 \end{aligned}$$

donc $f'(X) = 3X^2 - 2(r_1 + r_2 + r_3)X + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$. Le discriminant réduit de ce trinôme du second degré est

$$\begin{aligned} \Delta' &= (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_1r_2 - r_2r_3 - r_1r_3. \end{aligned}$$

Il est nul (autrement dit $f'(X)$ possède une racine double) si et seulement si la relation

$$(R): \qquad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1.$$

est satisfaite. Pour conclure, il reste à démontrer que

$$(M_1M_2M_3 \text{ équilatéral}) \quad \Leftrightarrow \quad (R).$$

Montrons le sens direct : si $M_1M_2M_3$ est équilatéral, il existe $\theta \in \{\pm\pi/3\}$ tel que

$$\frac{r_1 - r_2}{r_3 - r_2} = e^{i\theta} = \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3},$$

(voir FIG. 4.2) d'où $\dfrac{r_1 - r_2}{r_3 - r_2} = \dfrac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3}$, c'est-à-dire $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$.

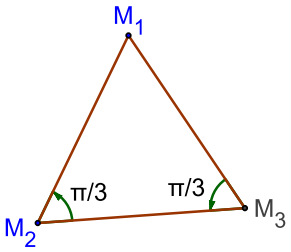


FIG. 4.2 – Le cas d'un triangle équilatéral direct

Pour montrer que, réciproquement, la condition (R) implique que $M_1M_2M_3$ est équilatéral, on essaie de remonter les calculs, et l'on s'aperçoit que l'on peut écrire des équivalences[1] :

$$\begin{aligned}
(R) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_1 - r_2}{r_3 - r_2} = \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M_1M_2 \times M_1M_3 = {M_2M_3}^2 \\ (\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}) = (\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}) \ (2\pi) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M_1M_2 \times M_1M_3 = {M_2M_3}^2 \\ M_1M_2M_3 \text{ isocèle en } M_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3 \\
&\Leftrightarrow \quad M_1M_2M_3 \text{ équilatéral.}
\end{aligned}$$

[1] L'équivalence écrite à la seconde ligne exprime que deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument.

Enfin, on remarque que si $M_1M_2M_3$ est équilatéral, la racine double de $f'(X)$ est $\omega = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$, et l'on reconnaît l'affixe du centre de gravité du triangle.

D.1.2. Si $M_1M_2M_3$ est équilatéral, la racine double ω de $f'(X)$ est le centre de gravité du triangle mais aussi le centre du cercle inscrit à ce triangle. On vient donc de prouver le résultat annoncé au début de la Partie D dans le cas particulier d'un triangle équilatéral.

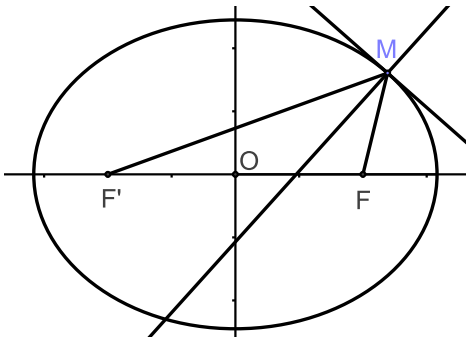


FIG. 4.3 – Une propriété des tangentes à une ellipse

D.2.1. Le vecteur $\overrightarrow{FF'}$ est indépendant de t, donc il suffit de dériver la relation $\overrightarrow{M(t)F} + \overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{M(t)F'}$ pour obtenir

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F'}).$$

D.2.2. Le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ est unitaire quel que soit la valeur du paramètre t, et $\overrightarrow{M(t)F} = M(t)F\ \overrightarrow{u}(t)$, donc $\overrightarrow{M(t)F}.\overrightarrow{u}(t) = M(t)F$ (on a écrit un produit scalaire). De même $\overrightarrow{M(t)F'}.v(t) = M(t)F'$. La relation $MF + MF' = 2a$ s'écrit donc

$$\overrightarrow{M(t)F}.\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{M(t)F'}.v(t) = 2a,$$

et il suffit de dériver les deux membres par rapport à t pour obtenir

$$\frac{d(\overrightarrow{M(t)F})}{dt}.\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{M(t)F}.\frac{d(\overrightarrow{u}(t))}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{M(t)F'})}{dt}.\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{M(t)F'}.\frac{d(\overrightarrow{v}(t))}{dt} = 0.$$

Pour tout t, $||\overrightarrow{u}(t)||^2 = \overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}(t) = 0$, donc en dérivant ce produit scalaire :

$$2\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u}(t)).\overrightarrow{u}(t) = 0,$$

et comme $\overrightarrow{M(t)F}$ et $\overrightarrow{u}(t)$ sont colinéaires,

$$\overrightarrow{M(t)F}.\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u}(t)\right)=0.$$

De même $\overrightarrow{M(t)F'}.\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}(t)\right)=0$, et l'égalité obtenue plus haut devient :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F}).\overrightarrow{u}(t)+\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F'}).\overrightarrow{v}(t)=0.$$

Compte tenu de la question précédente, $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F})=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{M(t)F'})=\overrightarrow{\tau}(t)$ donc

$$\left(\overrightarrow{u}(t)+\overrightarrow{v}(t)\right).\overrightarrow{\tau}(t)=0.$$

D.2.3. La question précédente montre que la tangente à l'ellipse en $M(t)$ est orthogonale à la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(t)+\overrightarrow{v}(t)$, mais ce vecteur directeur dirige la bissectrice intérieure du triangle $M(t)FF'$ issue de $M(t)$. La tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est donc la bissectrice extérieure du triangle $M(t)FF'$ issue de $M(t)$.

Remarque : Les questions (D.2) et (D.3) de ce problème sont des questions de cours traitées en [5]. Si la question (D.2) fait partie des fondamentaux à bien connaître (pour les écrits et les oraux des concours) concernant les coniques ([5], Th. 331), les théorèmes de Poncelet ([5], Section 21.4) font partie des approfondissements qui peuvent donner lieu à des enchaînements de questions dans des problèmes de concours comme celui-ci.

D.3.1. On sait que la tangente (PT_1) en T_1 à l'ellipse est la bissectrice extérieure du triangle T_1FF' issue de T_1 (FIG. 4.4). L'image de la demi-droite $[T_1F)$ par la réflexion de base (PT_1) est donc la demi-droite $-[T_1F')$ opposée à $[T_1F')$. Le symétrique F_1 de F par rapport à (PT_1) appartient ainsi à la demi-droite $-[T_1F')$, et l'on a $T_1\in[F'F_1]$. En utilisant la conservation des distances par une réflexion, on obtient alors :

$$F'F_1=F'T_1+T_1F_1=F'T_1+T_1F=2a.$$

D.3.2. La question précédente appliquée avec F_2 à la place de F_1 donne $F'F_2=2a$. Ainsi $F'F_1=F'F_2=2a$. Les réflexions conservent les distances, et F_1 (resp. F_2) est le symétrique de F par rapport à (PT_1) (resp. (PT_2)). Donc $PF_1=PF=PF_2$. Finalement, P et F' sont équidistants des extrémités du segment $[F_1F_2]$, donc (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

D.3.3.a. $\mathcal{S}_{(PF)}\circ\mathcal{S}_{(PT_1)}$ est la composée de deux réflexions par rapport à des droites qui se coupent en P. C'est donc la rotation de centre P et d'angle

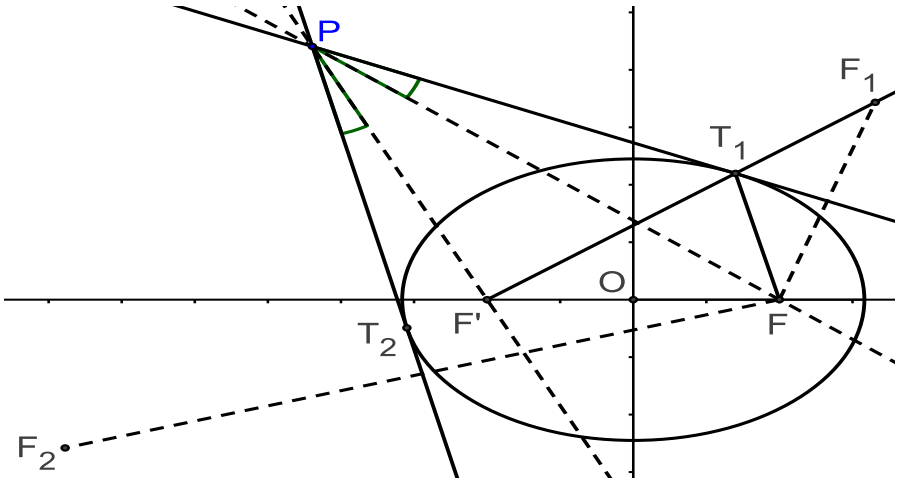


FIG. 4.4 – Second théorème de Poncelet

$2((PT_1),(PF))$ (deux fois l'angle de droite $((PT_1),(PF))$ que l'on peut identifier à sa mesure modulo π dans notre plan orienté).
On a $\left(\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}\right)(F_1) = \mathcal{S}_{(PF)}(F) = F$, donc $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$ est la rotation de centre P qui amène F_1 sur F.

D.3.3.b. $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ est la rotation de centre P et d'angle $2((PF'),(PT_2))$. Comme (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$, $\mathcal{S}_{(PF')}(F_1) = F_2$ et

$$\left(\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}\right)(F_1) = \mathcal{S}_{(PT_2)}(F_2) = F.$$

$\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ est donc encore la rotation de centre P qui amène F_1 sur F, celle obtenue à la question précédente, donc $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)} = \mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$. On en déduit l'égalité (entre mesures d'angles de vecteurs) :

$$2((PT_1),(PF)) = 2((PF'),(PT_2)) \ \ (2\pi)$$

d'où l'égalité (entre mesures d'angles de droites) :

$$((PT_1),(PF)) = ((PF'),(PT_2)) \ \ (\pi)\,.$$

Remarques : α) On vient de démontrer le second théorème de Poncelet qui s'énonce aussi de la façon suivante :

> "Si $\mathcal{C}$ est une conique à centre de foyers F et F', et si P est un point du plan par lequel on peut abaisser sur $\mathcal{C}$ deux tangentes (PT_1) et (PT_2), alors les couples de droites $((PT_1),(PT_2))$ et $((PF),(PF'))$ ont mêmes bissectrices."

En effet, si $((PT_1),(PF)) = ((PF'),(PT_2))\ (\pi)$, et si Δ désigne une des deux bissectrices du couple de droites $((PF),(PF'))$, on a (en angles de droites) :

$$((PF),\Delta) = \left(\Delta,(PF')\right) \quad \text{et} \quad ((PT_1),(PF)) = ((PF'),(PT_2))$$

donc

$$\begin{aligned}((PT_1),\Delta) &= ((PT_1),(PF)) + ((PF),\Delta)\\ &= ((PF'),(PT_2)) + \left(\Delta,(PF')\right)\\ &= (\Delta,(PT_2))\,,\end{aligned}$$

de sorte que Δ soit aussi une des bissectrices du couple $((PT_1),(PT_2))$.

β) La preuve donnée ici s'adapte facilement au cas d'une hyperbole avec un seul changement notoire : si les points F_1, T_1 et F' sont toujours alignés, cette fois-ci F' et F_1 sont situés du même côté par rapport à T_1, ce qui permet d'écrire $F'F_1 = |F'T_1 - F_1T_1| = |F'T_1 - FT_1| = 2a$ et de continuer sans modification.

γ) Une autre démonstration du second théorème de Poncelet est proposée en ([5], Th. 341).

D.4.1. Comme $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral, la question (D.1.1) montre effectivement que $w \neq w'$, donc que F et F' sont distincts. Cela vaut mieux pour des futurs foyers d'ellipse.
Soit A le milieu de $[M_1M_2]$. La seule ellipse qui puisse répondre à la question est

$$(\mathcal{E}) = \left\{M \in \mathcal{P} \,/\, MF + MF' = AF + AF'\right\},$$

mais est-ce bien une ellipse ? Cela pourrait bien être l'ensemble vide ou le segment $[FF']$!
Ce sera une ellipse si et seulement si $AF + AF' > FF'$, c'est-à-dire $A \notin [FF']$. Raisonnons par l'absurde. Si A appartenait à $[FF']$, A serait l'isobarycentre de F, F', mais d'après le Théorème de Lucas, F et F' sont des barycentres à coefficients strictement positifs des sommets du triangle $M_1M_2M_3$, par conséquent (et par associativité du barycentre), A serait aussi barycentre à coefficients strictement positifs de M_1, M_2, M_3. C'est impossible puisque A appartient à (M_1M_2).

D.4.2.a. En dérivant $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$, on obtient

$$f'(X) = (X - r_1)(X - r_2) + (X - r_2)(X - r_3) + (X - r_3)(X - r_1)\,.$$

Le coefficient dominant de $f'(X)$ est donc 3. Comme w et w' sont les racines de $f'(X)$, on aura $f'(X) = 3(X - w)(X - w')$, d'où l'égalité annoncée.

D.4.2.b. Notons $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ l'affixe de A.

• En faisant $X = a$ dans l'égalité polynomiale de la question (D.4.2.a), on obtient

$$3\,(a - w)\left(a - w'\right) = \frac{r_2 - r_1}{2} \times \frac{r_1 - r_2}{2}$$

soit

$$12\,\frac{w - a}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - a}.$$

Remarque : Si l'on ne pense pas rapidement (moins d'une minute) à remplacer X par a pour voir si cela ne donne pas immédiatement l'égalité voulue, il ne faut pas insister et choisir la méthode suivante qui "fonctionne à tous les coups" et nous permet de répondre à cette question quoi qu'il arrive. En développant l'égalité polynomiale de la question (D.4.2.a), on obtient :

$$3X^2 - 3\left(w + w'\right)X + 3ww' = 3X^2 - 2\,(r_1 + r_2 + r_3)\,X + r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$$

d'où

$$(E) \quad \begin{cases} 3\,(w + w') = 2\,(r_1 + r_2 + r_3) \\ 3ww' = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1. \end{cases}$$

On écrit ensuite que l'égalité à démontrer équivaut successivement à :

$$12\left(w - \frac{r_1 + r_2}{2}\right)\left(w' - \frac{r_1 + r_2}{2}\right) = -\,(r_1 - r_2)^2$$

$$3\,(2w - (r_1 + r_2))\left(2w' - (r_1 + r_2)\right) = -\,(r_1 - r_2)^2$$

$$12ww' + 3\,(r_1 + r_2)^2 - 6\,(r_1 + r_2)\left(w + w'\right) = -\,(r_1 - r_2)^2$$

ou encore à

$$4\,(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) + 3\,(r_1 + r_2)^2 - 4\,(r_1 + r_2)\,(r_1 + r_2 + r_3) + (r_1 - r_2)^2 = 0$$

en utilisant (E). Cette dernière égalité est toujours vérifiée, donc l'égalité proposée par l'énoncé est exacte.

• De

$$12\,\frac{w - a}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - a}$$

on tire

$$\arg\left(\frac{w - a}{r_1 - r_2}\right) = \arg\left(\frac{r_2 - r_1}{w' - a}\right)\ (2\pi)\,.$$

Avec des angles de vecteurs[2], on obtient donc

$$(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1M_2}) \ (2\pi) \quad (\heartsuit)$$

soit

$$\pi + (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1M_2}) \ (2\pi)\,.$$

En passant à des angles de droites :

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1M_2}) \ (\pi)\,.$$

Cela prouve que la droite (M_1M_2) est UNE bissectrice issue de A du triangle AFF'.

En fait (M_1M_2) ne peut pas être la bissectrice intérieure issue de A, autrement elle couperait le côté $[FF']$ ([3]). C'est impossible car F et F' appartiennent à l'intérieur strict du triangle $M_1M_2M_3$ d'après le Théorème de Lucas ([4]), et donc F, F' appartiennent au demi-plan ouvert $\mathcal{P}_+$ de frontière (M_1M_2) contenant M_3 ([5]). Par convexité $[FF'] \subset \mathcal{P}_+$, donc $[FF'] \cap (M_1M_2) = \varnothing$.

Finalement (M_1M_2) est la bissectrice extérieure issue de A du triangle AFF', c'est-à-dire la tangente en A à l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'après la question (D.2.3).

Remarque : On peut déduire directement de $(\heartsuit)$ que (M_1M_2) est la bissectrice extérieure issue de A du triangle AFF'. Il suffit de rappeler que A est le milieu de $[M_1M_2]$, et que par conséquent $(\heartsuit)$ donne

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AF}) &= (\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{AM_2}) \\ &= (\overrightarrow{F'A}, \overrightarrow{M_2A}) \\ &= (\overrightarrow{F'A}, \overrightarrow{AM_1}) \ (2\pi)\end{aligned}$$

[2] Comme d'habitude j'identifie les angles orientés avec leurs mesures (qui existent puisque nous travaillons dans un plan orienté).

[3] De façon générale, on connaît les coordonnées barycentriques de l'intersection J de la bissectrice intérieure issue de A d'un triangle ABC non aplati et du côté opposé $[BC]$. Si $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ désignent les longueurs des côtés du triangle, J est le barycentre de $B\,(b)$, $C\,(c)$ ([5], §10.1.5, Lemme 10). Comme b et c sont strictement positifs, J appartient à $]BC[$. Si par hasard AFF' était aplati, la bissectrice intérieure issue de A contiendrait $[FF']$, donc couperait encore $[FF']$.

[4] On parle "d'intérieur strict" car les coordonnées barycentriques de F et F' sont strictement positives, comme on l'a vu à la question (C.2). F et F' ne peuvent donc pas appartenir aux supports des côtés du triangle $M_1M_2M_3$.

[5] Preuve : l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de M_1, M_2, M_3. C'est donc l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ de $\{M_1, M_2, M_3\}$. Comme M_1, M_2, M_3 appartiennent au demi-plan fermé $\overline{\mathcal{P}}_+$ de frontière (M_1M_2) contenant M_3, et comme ce demi-plan est convexe, on en déduit que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{P}}_+$, donc que F et F', qui appartiennent à $\mathcal{C}$, appartiennent aussi à $\overline{\mathcal{P}}_+$. Comme F et F' ne sont pas sur la frontière (M_1M_2), ce seront bien des points du demi-plan ouvert $\mathcal{P}_+$.

soit $(\overrightarrow{F'A}, \overrightarrow{AM_1}) = (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AF})\ (2\pi)$. Cette égalité d'angles de vecteurs traduit le fait que la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{AM_1}$ est la bissectrice du couple de demi-droites $(\mathbb{R}_+\overrightarrow{F'A}, \mathbb{R}_+\overrightarrow{AF})$, c'est-à-dire de $(-\mathbb{R}_+\overrightarrow{AF'}, \mathbb{R}_+\overrightarrow{AF})$ (avec des notations évidentes). $\mathbb{R}\overrightarrow{AM_1}$ est donc *par définition* la bissectrice extérieure issue de A du triangle AFF' (faire un dessin).

D.4.3.a. Faisons $X = r_1$ dans l'égalité polynomiale de la question (D.4.2.a). On obtient $3\,(r_1 - w)\,(r_1 - w') = (r_1 - r_2)\,(r_1 - r_3)$, soit

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3\,\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}. \quad (\dagger)$$

Remarque : On peut procéder autrement et dire que l'égalité (†) à démontrer équivaut à $(r_2 - r_1)\,(r_3 - r_1) = 3\left[ww' - r_1\,(w + w') + r_1^2\right]$. Il suffit alors de remplacer ww' et $w + w'$ par leurs expressions en fonctions des r_i (relations (E)) pour vérifier que cette dernière égalité est vraie :

$$\begin{aligned} 3\left[ww' - r_1\left(w + w'\right) + r_1^2\right] &= r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 - 2r_1\,(r_1 + r_2 + r_3) + 3r_1^2 \\ &= r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3 \\ &= (r_2 - r_1)\,(r_3 - r_1)\,. \end{aligned}$$

D.4.3.b. L'égalité montrée dans la question précédente donne

$$\arg\left(\frac{r_2 - r_1}{w - r_1}\right) = \arg\left(\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}\right)$$

d'où l'égalité entre angles orientés de vecteurs

$$(\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1M_2}) = (\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1F'})\ (2\pi)$$

et a fortiori celle-ci, entre des angles de droites :

$$((M_1F)\,, (M_1M_2)) = ((M_1M_3)\,, \left(M_1F'\right))\ (\pi)\,. \quad (\flat)$$

Notons (M_1M_2) et T les tangentes à $(\mathcal{E})$ issues de M_1. Le second théorème de Poncelet (rappelé en D.3) donne

$$((M_1M_2)\,, (M_1F)) = (\left(M_1F'\right), T)\ (\pi)\,. \quad (\natural)$$

$(\flat)$ et $(\natural)$ donnent

$$(\left(M_1F'\right), (M_1M_3)) = (\left(M_1F'\right), T)\ (\pi)$$

d'où $(M_1M_3) = T$. La droite (M_1M_3) est donc bien la seconde tangente à l'ellipse issue de M_1.

D.4.4. On vient de montrer que l'ellipse $(\mathcal{E})$ est de foyers F et F', passe par le milieu A de $[M_1M_2]$, et admet (M_1M_2) et (M_1M_3) comme tangentes. Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montrerait que (M_2M_3) est aussi une tangente à $(\mathcal{E})$.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à démontrer que les milieux B et C de $[M_2M_3]$ et $[M_3M_1]$ appartiennent à $(\mathcal{E})$ (FIG. 4.5). Voyons-le pour C (le raisonnement sera le même pour B).

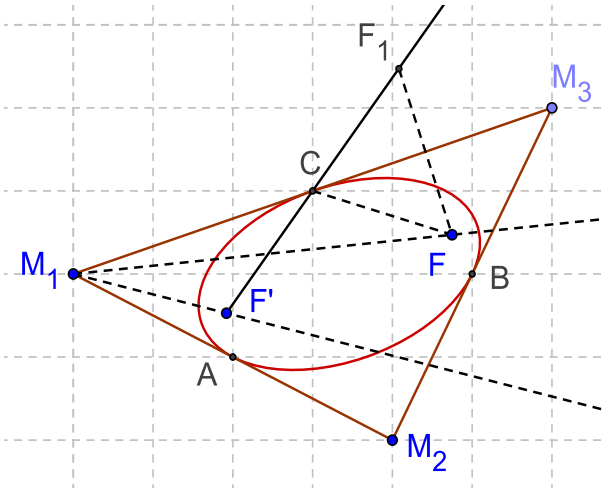


FIG. 4.5 – Tracé de $(\mathcal{E})$

Première solution : A priori, il est facile de vérifier que le point C est le milieu de $[M_1M_3]$ par le calcul, en utilisant des affixes. Pour cela, il suffit de vérifier que $CF + CF' = AF + AF'$, autrement dit que

$$|w - c| + |w' - c| = |w - a| + |w' - a|$$

où a et b désignent les affixes de A et B. On élève au carré, et on se retrouve empêtré dans des calculs... Cherchons autre chose.

Seconde solution : Notons C' le point de contact sur $(\mathcal{E})$ de la tangente (M_1M_3) à $(\mathcal{E})$. On sait que (M_1M_3) est la bissectrice extérieure issue de C' du triangle $C'FF'$, donc le symétrique F_1 de F par rapport à (M_1M_3) appartient à $(F'C')$, soit $C' \in (F'F_1)$. On a donc

$$C' \in \big(F'F_1\big) \cap (M_1M_3)\,. \quad (\flat)$$

Si l'on reprend la question (D.4.2.b) avec $\frac{r_1+r_3}{2}$ (affixe de C) à la place de $\frac{r_1+r_2}{2}$ (affixe de A), on obtient

$$(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{M_1M_3}) \ (2\pi)$$

et l'on déduit de la même façon que (M_1M_3) est la bissectrice extérieure issue de C du triangle $C'FF'$. Mais alors

$$C \in \left(F'F_1\right) \cap (M_1M_3)\,. \quad (\natural)$$

$(\flat)$ et $(\natural)$ donnent $C = C'$, d'où $C \in (\mathcal{E})$.

Remarque : Une ellipse peut très bien être tangente aux trois côtés d'un triangle, et l'un de ces points de tangence être le milieu d'un côté, sans que les deux autres points de tangences soient les milieux des côtés, comme on le voit sur le contre-exemple de la FIG. 4.6. Pour répondre à la dernière question du problème, on est donc obligé d'utiliser un peu plus que ce qui a été démontré juste avant, autrement dit raisonner à nouveau comme dans (D.4.2.b) avec M_3 à la place de M_2.

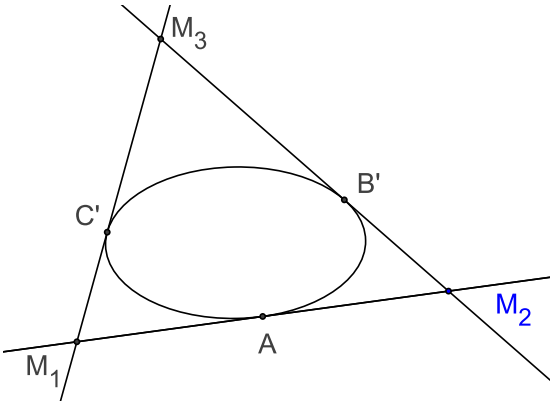


FIG. 4.6 – Contre-exemple

4.3 Compléments

Le problème que l'on vient de traiter soulève quelques interrogations légitimes, et peut servir de tremplin pour avoir le courage d'y répondre.
Je reprends ici quelques résultats déjà développés dans mes *livres d'exercices pour les concours* ([1] et [3]) et dans mon *Cours de géométrie* [5] pour que le

lecteur de ces annales profite au mieux du travail qu'il a consenti en s'attaquant à ce problème ici et maintenant, sans avoir à se lancer dans la recherche de ces références.
Bon approfondissement de ce problème...

4.3.1 Nombre de tangentes à une conique issues d'un point

Au début de la question D.3 du problème de la §. 4.1, on admet qu'il existe toujours deux tangentes à une ellipse issues d'un point P situé strictement à l'extérieur de celle-ci.
Démontrons ce résultat, et traitons aussi les cas de l'hyperbole et de la parabole.

Exercice 4.1 *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a. On appelle cercle directeur relatif à F' le cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$ de centre F' et de rayon $2a$. On rappelle qu'une droite est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si le symétrique de F par rapport à cette droite appartient à $\mathcal{C}(F', 2a)$. Utilisez ce résultat pour discuter du nombre de tangentes à $\mathcal{E}$ issues d'un point P donné.*

Solution : Soit P un point du plan. Si la droite T est tangente à l'ellipse et passe par P, alors le symétrique F_1 de F par rapport à T appartient au cercle directeur $\mathcal{C}(F', 2a)$ (FIG. 4.7). Donc $F_1 \in \mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)$.
Réciproquement, tout point F_1 de $\mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)$ définit une droite T médiatrice de $[FF_1]$ et tangente à l'ellipse. Trouver le nombre de tangentes à l'ellipse issues de P revient donc à trouver le nombre de points d'intersection des cercles $\mathcal{C}(F', 2a)$ et $\mathcal{C}(P, PF)$.

On envisage trois cas :

- Si $PF' + PF > 2a$, c'est-à-dire si P est extérieur à l'ellipse, les cercles $\mathcal{C}(F', 2a)$ et $\mathcal{C}(P, PF)$ s'interceptent en deux points distincts puisque

$$|PF - 2a| < PF' < PF + 2a,$$

comme on le vérifie ici[6] :

$$\begin{cases} PF' < PF + 2a \text{ provient de } PF' \leq PF + FF' = PF + 2c < PF + 2a, \\ PF < PF' + 2a \text{ provient de } PF \leq PF' + F'F = PF' + 2c < PF' + 2a, \\ 2a < PF + PF' \text{ est acquis par hypothèse.} \end{cases}$$

Dans ce cas, à partir de P on peut abaisser exactement deux tangentes à $\mathcal{E}$.

[6] La distance entre les deux foyers de $\mathcal{E}$ est notée $FF' = 2c$, et l'on sait que $c < a$.

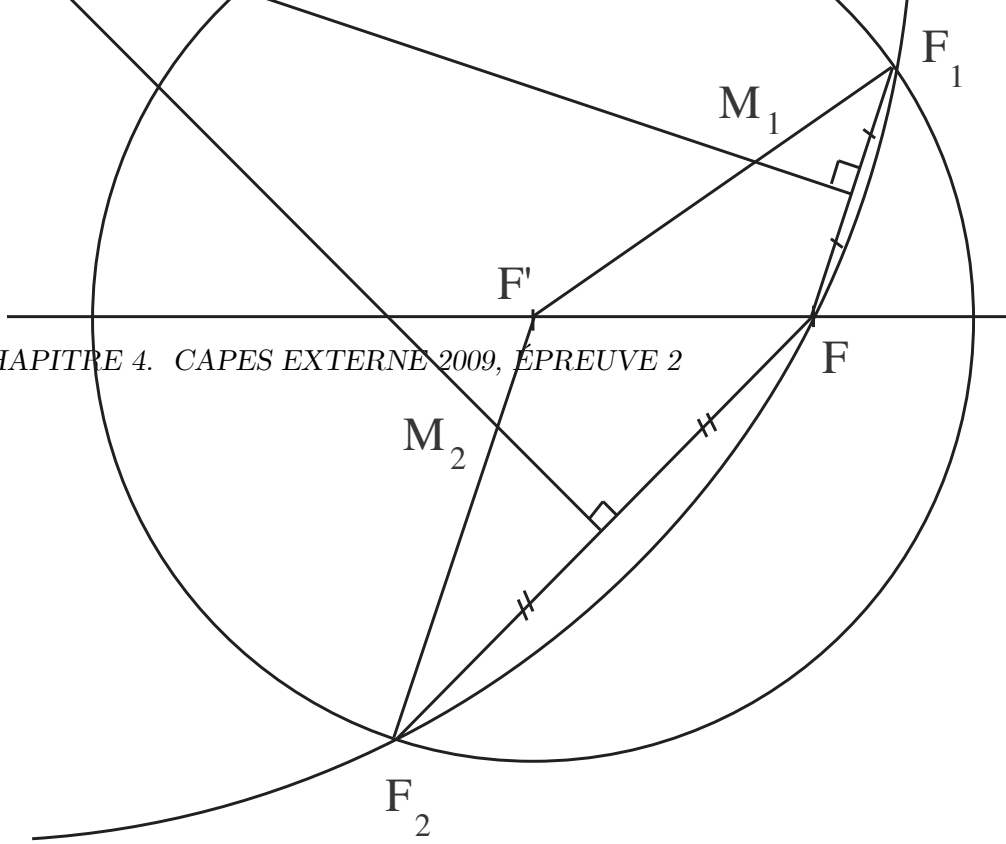


FIG. 4.7 – Tangentes à $\mathcal{E}$ issues de P

- Si $PF' + PF = 2a$, c'est-à-dire si P appartient à l'ellipse, alors les cercles sont tangents et il n'existe qu'une seule tangente à $\mathcal{E}$ issue de P.

- Si $PF' + PF < 2a$, c'est-à-dire si P est à l'intérieur de l'ellipse, les deux cercles ne s'interceptent pas, donc aucune tangente à $\mathcal{E}$ ne passe par P.

Conclusion : à partir d'un point P extérieur (resp. appartenant, intérieur) à une ellipse on peut mener exactement deux (resp. une, aucune) tangente(s) à celle-ci.

Exercice 4.2 *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F et F' et de cercle principal de rayon a. On appelle cercle directeur relatif à F' le cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$ de centre F' et de rayon $2a$. On rappelle qu'une droite est tangente à $\mathcal{H}$ si et seulement si le symétrique de F par rapport à cette droite appartient à $\mathcal{C}(F', 2a) \setminus \{U, V\}$ où U, V désignent les points de contact de la tangente à $\mathcal{C}(F', 2a)$ issue de F. Utilisez ce résultat pour discuter le nombre de tangentes à $\mathcal{H}$ issues d'un point quelconque P donné dans le plan.*

Solution : Les points U, V sont les points du cercle directeur $\mathcal{C}(F', 2a)$ tels que $UF'F$ et $VF'F$ sont rectangles en U et V.
Soit P un point du plan (FIG. 4.8). Si la droite T est une tangente à $\mathcal{H}$ issue de P, le symétrique F_1 de F par rapport à T appartient à $\mathcal{C}(F', 2a) \setminus \{U, V\}$, donc $F_1 \in (\mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)) \setminus \{U, V\}$.
Réciproquement, tout point F_1 de $(\mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)) \setminus \{U, V\}$ définit une droite T médiatrice de $[FF_1]$ et tangente à l'hyperbole.

Trouver le nombre de tangentes à $\mathcal{H}$ issues de P revient donc à trouver le cardinal de $(\mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)) \setminus \{U, V\}$.

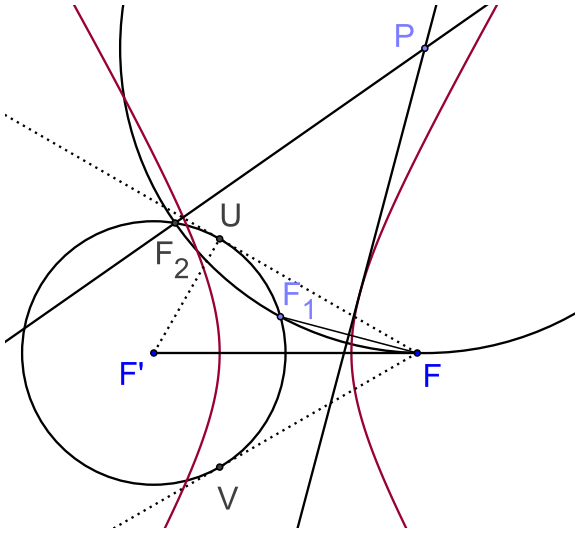


FIG. 4.8 – Tangentes à $\mathcal{H}$ issues de P

On envisage 3 cas :

1) Si $|PF' - PF| < 2a$, on dit que P est à l'extérieur de l'hyperbole. Les cercles $\mathcal{C}(F', 2a)$ et $\mathcal{C}(P, PF)$ se coupent alors toujours en deux points distincts puisque $|PF' - PF| < 2a < PF + PF$ (en effet $2a < 2c = FF' \leq PF + PF$).

2) Si $|PF' - PF| = 2a$, P appartient à l'hyperbole, les cercles sont tangents et il existe une unique tangente à $\mathcal{H}$ issue de P.

3) Si $|PF' - PF| > 2a$, on dit que P est à l'intérieur de l'hyperbole. Dans ce cas les deux cercles ne s'interceptent pas : il n'existe aucune tangente à $\mathcal{H}$ issue de P.

Mais il faut faire attention : dans le cas 1), il se peut que l'un des points de $\mathcal{C}(F', 2a) \cap \mathcal{C}(P, PF)$ soit à rejeter. C'est le cas lorsque l'une des intersections des deux cercles est U ou V, autrement dit lorsque le triangle FF_1F' est rectangle en F_1. Dans ce cas, en notant I le milieu de $[FF_1]$ et O celui de $[FF']$ (FIG. 4.9), on constate que $P \in (OI)$ et que

$$|\tan \widehat{IOF}| = |\tan \widehat{F_1F'F}| = \frac{F_1F}{F_1F'} = \frac{\sqrt{4c^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{b}{a},$$

donc que (OI) est l'une des asymptotes de $\mathcal{H}$.

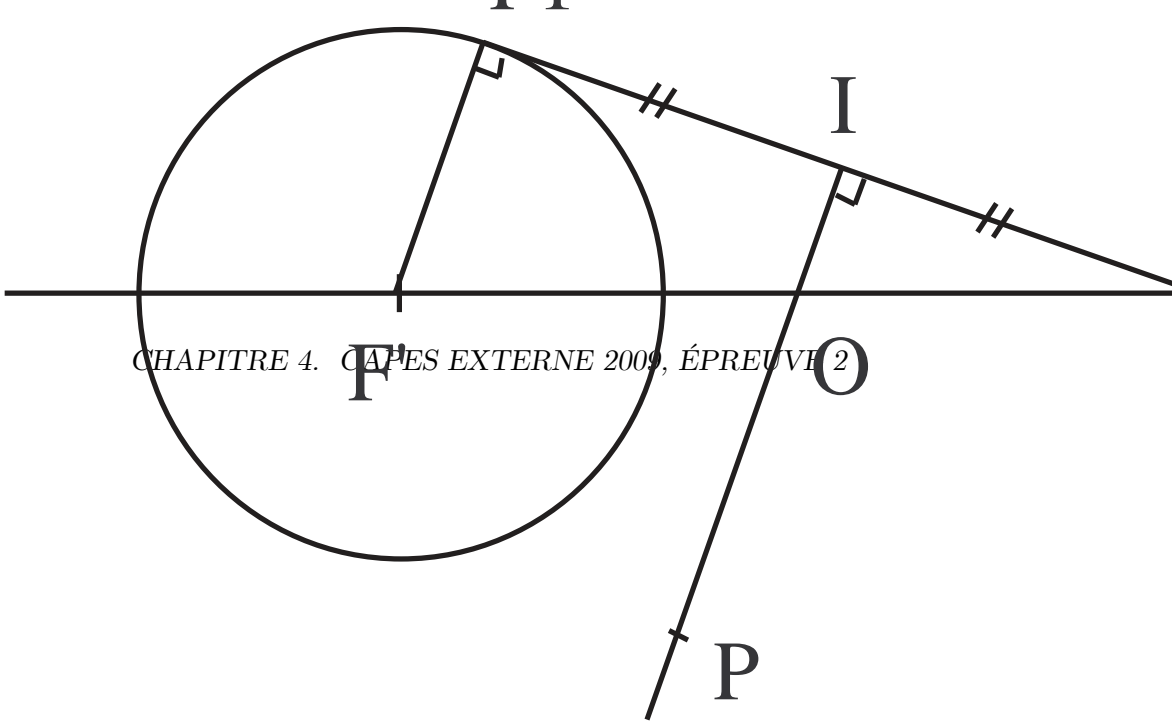


FIG. 4.9 – Le cas pathologique

Si P appartient à une asymptote, il faut supprimer une "tangente potentielle". Si P appartient aux deux asymptotes, autrement dit si $P = O$, on est obligé de supprimer toutes les "tangentes potentielles" et il n'en reste plus !
En conclusion, si $N(P)$ désigne le nombre de tangentes à $\mathcal{H}$ issues de P :

1) $N(P) = 2$ si $|PF' - PF| < 2a$ et si P n'est pas sur une asymptote de $\mathcal{H}$,

1') $N(P) = 1$ si P est sur l'une des asymptotes de $\mathcal{H}$ sans être égal à O,

1") $N(P) = 0$ si $P = O$,

2) $N(P) = 1$ si $|PF' - PF| = 2a$ (autrement dit si $P \in \mathcal{H}$),

3) $N(P) = 0$ si $|PF' - PF| > 2a$.

Exercice 4.3 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D. Combien peut-on tracer de tangentes à $\mathcal{P}$ issues d'un point P donné ? Discuter suivant la position de P.*

Solution : Si P appartient à une tangente T à $\mathcal{P}$, notons M le point de contact de T sur $\mathcal{P}$. Le symétrique H de F par rapport à T appartient à la directrice D et $PH = PF$. Par conséquent le cercle $\mathcal{C}(P, PF)$ coupe la droite D en H.
Réciproquement, toute intersection H de $\mathcal{C}(P, PF)$ et D définit un unique point M de $\mathcal{P}$ tel que (PM) soit une tangente à $\mathcal{P}$ passant par P (FIG. 4.10).

Le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ issues de P est donc égal au nombre de points d'intersection du cercle $\mathcal{C}(P, PF)$ et de la directrice D.
Si $\mathrm{d}(P, D)$ désigne la distance de P à la droite D, on distingue trois cas :

- Si $\mathrm{d}(P, D) < PF$, le cercle $\mathcal{C}(P, PF)$ coupe D en deux points distincts, et il existe deux tangentes à $\mathcal{P}$ issues de P. Par définition, on dit que l'ensemble $\{P \,/\, \mathrm{d}(P, D) < PF\}$ est *l'extérieur de la parabole.*

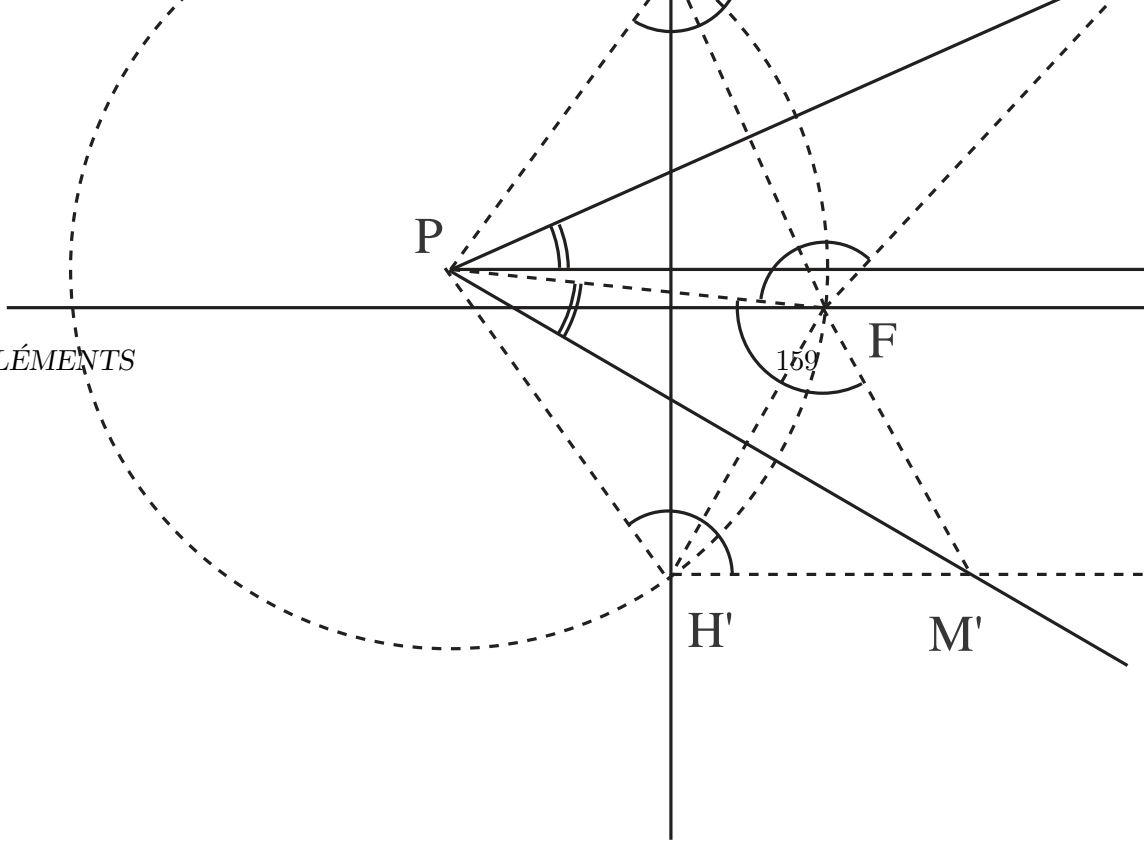


FIG. 4.10 – Tangentes à $\mathcal{P}$ issues de P

- Si $\mathrm{d}\,(P, D) = PF$, autrement dit si $P \in \mathcal{P}$, le cercle $\mathcal{C}\,(P, PF)$ est tangent à D et il n'existe qu'une seule tangente à $\mathcal{P}$ issue de P.

- Si $\mathrm{d}\,(P, D) > PF$, le cercle $\mathcal{C}\,(P, PF)$ et la droite D sont disjoints et aucune des tangentes de $\mathcal{P}$ ne contient P. On dit que l'ensemble $\{P \,/\, \mathrm{d}\,(P, D) > PF\}$ est *l'intérieur de la parabole*.

Remarques : α) La FIG. 4.10 nous donne aussi une construction à la règle et au compas des tangentes cherchées, ce qui peut être demandé à l'oral d'un concours.

β) Dans un problème de concours récent, on demandait d'expliciter la condition $\mathrm{d}\,(P, D) < PF$ lorsque $\mathcal{P}$ était donnée analytiquement. Par exemple, si $\mathcal{P}$ est d'équation $y^2 = 2px$, le foyer F admet les coordonnées $(p/2, 0)$, la directrice D admet l'équation $x = -p/2$, et

$$\mathrm{d}\,(P, D) < PF \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} < \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Si $x \geq -p/2$, on peut écrire

$$\mathrm{d}\,(P, D) < PF \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 > 2px$$

soit

$$\mathrm{d}\,(P, D) < PF \overset{(*)}{\Leftrightarrow} y^2 > 2px.$$

Si $x < -p/2$, on voit directement que $\mathrm{d}(P,D) < PF$ (imaginer la figure !) et que $x + \frac{p}{2} \leq 0 < \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ sont des assertions vraies, donc que $y^2 > 2px$ est vraie. L'équivalence $(*)$ est donc encore vraie sous la condition $x < -p/2$. En conclusion l'équivalence $(*)$ est vraie quelle que soit la position de x par rapport à $-p/2$, et :

$$\{P \,/\, \mathrm{d}(P,D) < PF\} = \left\{P \,/\, y^2 > 2px\right\}$$

4.3.2 Les théorèmes de Poncelet

Je reprends ici la Section 21.4 du *Cours de géométrie* [5].
Dans les deux premiers Théorèmes qui suivent, F_1 et F_2 désignent les symétriques de F par rapport aux deux tangentes issues de P, et l'on sait que F_1 et F_2 appartiennent au cercle directeur $\mathcal{C}(F', 2a)$ relatif au foyer F' (comme cela a été démontré pour une ellipse à la question D.3.1 du problème de la Section 4.1).

Théorème 4.1 ***(Premier Théorème de Poncelet)***
Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre de foyers F et F'. Soient M_1 et M_2 les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues d'un point P. Alors $(F'P)$ est une bissectrice du couple de droites $(F'M_1, F'M_2)$.

Preuve : La droite $(F'P)$ relie les centres des cercles $\mathcal{C}(F', 2a)$ et $\mathcal{C}(P, PF)$, donc est l'axe de symétrie de la réunion de ces cercles (FIG. 4.11).
L'image de $(F'F_1)$ par la réflexion de base $(F'P)$ sera donc égale à $(F'F_2)$, et cela signifie que $(F'P)$ est une bissectrice du couple de droites $(F'F_1, F'F_2)$, qui n'est autre que $(F'M_1, F'M_2)$. ■

Théorème 4.2 ***(Second Théorème de Poncelet)***
Soient $\mathcal{C}$ une conique à centre de foyers F et F', et P un point du plan par lequel on peut abaisser deux tangentes T et T' à $\mathcal{C}$. Les couples de droites (T, T') et (PF, PF') ont mêmes bissectrices.

Preuve :

• *Première preuve* : question D.3 du problème de la Section 4.1.

• *Seconde preuve*[7] : Les cercles $\mathcal{C}(F', 2a)$ et $\mathcal{C}(P, PF)$ se coupent en F_1 et F_2, donc (F_1F_2) est perpendiculaire à (PF'). Si l'on note H_i le milieu de $[FF_i]$ (comme sur la FIG. 4.12), (H_1H_2) sera parallèle à (F_1F_2) d'après le Théorème de la droite des milieux, donc (H_1H_2) sera aussi perpendiculaire à (PF').

[7] Cette preuve est donnée en [5].

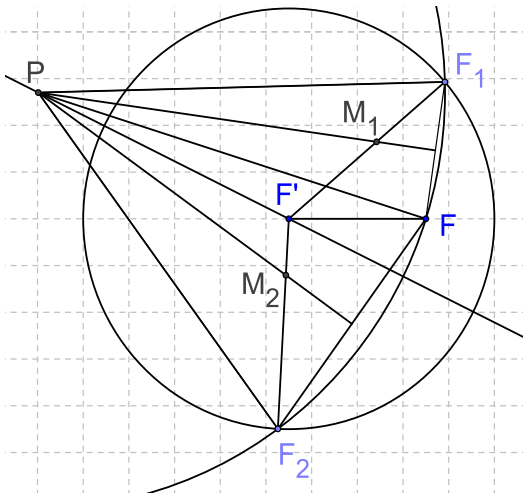


FIG. 4.11 – Premier Théorème de Poncelet

Le cercle $\mathcal{C}_{[PF]}$ de diamètre $[PF]$ recoupe (PF') en G. La droite (FG) est perpendiculaire à (PF'), donc sera parallèle à (H_1H_2). Les segments $[FG]$ et $[H_1H_2]$ auront même médiatrice puisqu'ils sont parallèles et que le centre I de $\mathcal{C}_{[PF]}$ est équidistant de F, G, H_1 et H_2. Par symétrie, on obtient

$$(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IH_1}) = (\overrightarrow{IH_2}, \overrightarrow{IG}) \ (2\pi)$$

d'où $(\overrightarrow{PH_2}, \overrightarrow{PG}) = (\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PH_1}) \ (\pi)$ par le Théorème de l'angle inscrit. On a démontré l'égalité entre angles de droites suivante : $(T', PF') = (PF, T)$, ce qui nous permet de conclure. ■

Remarque : Dans le cas limite où P appartient à $\mathcal{C}$, le second Théorème de Poncelet montre que la tangente T à $\mathcal{C}$ en P est l'une des bissectrices de (PF, PF'). On retrouve le résultat classique de la question D.2 du problème de la Section 4.1.

Théorème 4.3 ***(Premier Théorème de Poncelet, version parabole)*** *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D. Soient M et M' les points de contact des tangentes à $\mathcal{P}$ issues d'un point P. Alors (FP) est la bissectrice du couple de demi-droites $([FM), [FM'))$.*

Preuve : Avec les notations de la FIG. 4.10, les triangles HPM et FPM sont symétriques par rapport à la tangente (PM), donc

$$(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FP}) \ (2\pi) \, .$$

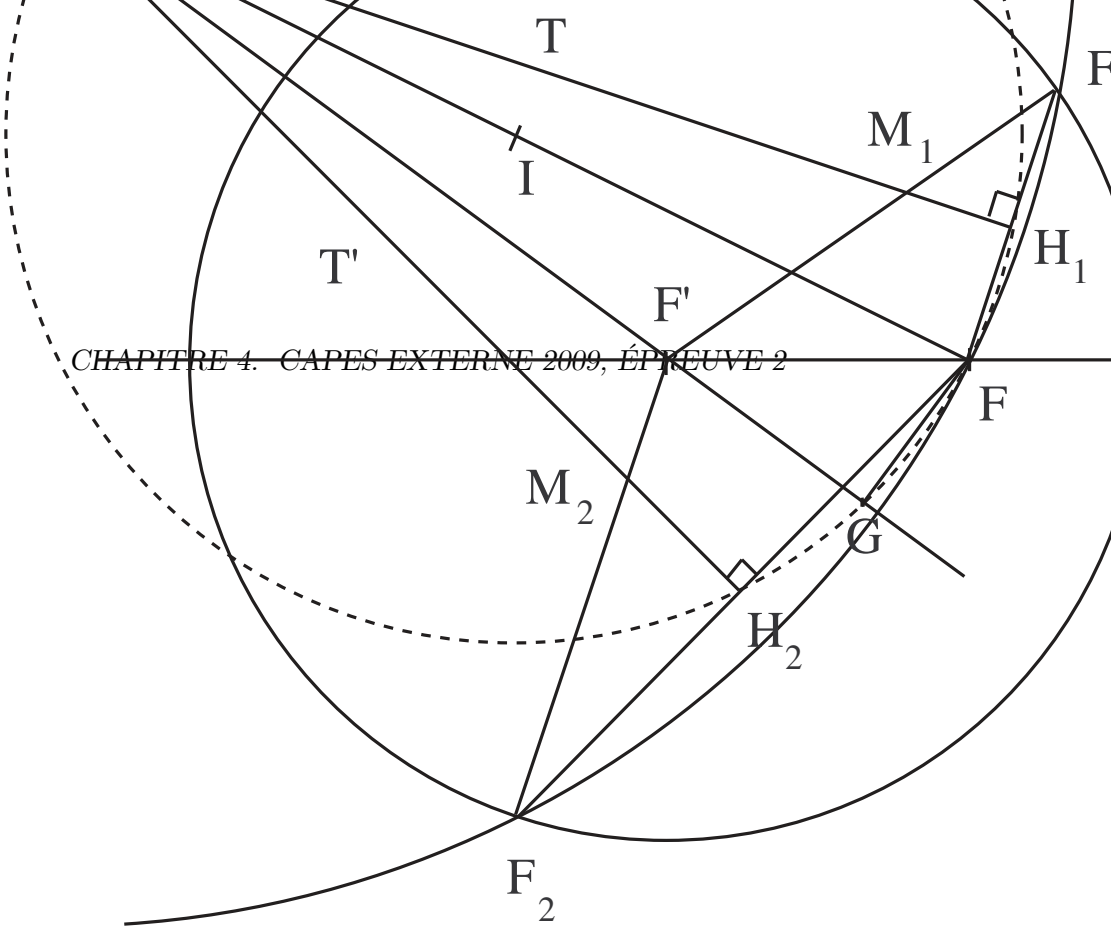


FIG. 4.12 – Second Théorème de Poncelet

De la même façon $(\overrightarrow{H'P}, \overrightarrow{H'M'}) = (\overrightarrow{FM'}, \overrightarrow{FP})\ (2\pi)$. Notons (Px) la droite passant pas P et parallèle à l'axe focal de la parabole. Les demi-droites $[HM)$ et $[H'M')$ sont symétriques par rapport à (Px), donc

$$(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{H'M'}, \overrightarrow{H'P})\ (2\pi)\,.$$

Finalement

$$(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FP}) = (\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{H'M'}, \overrightarrow{H'P}) = (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FM'})\ (2\pi)\,. \blacksquare$$

Théorème 4.4 ***(Second Théorème de Poncelet, version parabole)*** *Soient $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D, et P un point du plan par lequel on peut abaisser deux tangentes T et T' à $\mathcal{P}$. Soit (Px) la droite passant par P et parallèle à l'axe focal de $\mathcal{P}$. Les couples de droites (T, T') et (PF, Px) ont mêmes bissectrices.*

Preuve : On construit la FIG. 4.10 et l'on reprend la démonstration du Théorème 4.2 avec :

- (Px) à la place de (PF'),
- la directrice D à la place du cercle directeur $\mathcal{C}\,(F', 2a)$,
- H, H' à la place de F_1, F_2. $\blacksquare$

4.3.3 Une symétrie gauche qui conserve l'ellipse

Nous aurons besoin du joli résultat de l'exercice n°82 de [1] dans la Section suivante sur les ellipses de Steiner. Essayez de résoudre l'exercice sans regarder la solution, sauf si vous restez bloqué plus de 5 minutes sans avancer. Cet exercice est un bon entraînement sur les coniques.

Exercice 4.4 *(Ecrit du CAPES externe 1990) Soient A et B deux points distincts d'une ellipse $\mathcal{E}$. Les tangentes T_A et T_B à $\mathcal{E}$ issues de A et B se coupent en I, et l'on note J le milieu de $[AB]$. Montrer que $\mathcal{E}$ est invariante par la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (AB).*
[Ind. : Montrer ce résultat lorsque $\mathcal{E}$ est un cercle, puis utiliser une affinité.]

Solution : Soit O le centre de l'ellipse $\mathcal{E}$.

▶ *Montrons le résultat dans le cas particulier où l'ellipse $\mathcal{E}$ est un cercle* (FIG. 4.13). Dans ce cas, les triangles OAI et OBI sont symétriques par rapport à la droite (OI). En effet, l'image de A par la symétrie orthogonale s par rapport à (OI) est un point $s(A)$ qui :

- appartient au cercle $\mathcal{E}$ (puisque (OI) est un axe de symétrie du cercle : il passe par son centre !) ;

- appartient au cercle $\mathcal{C}_{OI}$ de diamètre $[OI]$ (puisque la réflexion s conserve l'orthogonalité, donc transforme le triangle rectangle OAI en un triangle rectangle $Os(A)I$: un résultat classique du cours montre alors que, si le triangle $Os(A)I$ est rectangle en $s(A)$, eh bien $s(A)$ appartient au cercle $\mathcal{C}_{OI}$ de diamètre $[OI]$).

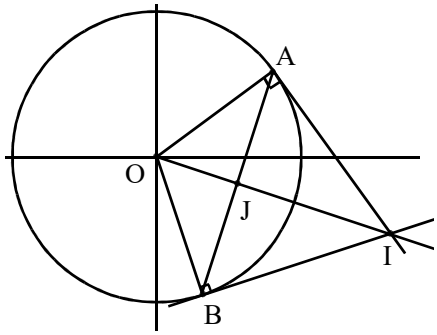


FIG. 4.13 – Cas particulier du cercle

Finalement $s(A) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}_{OI} = \{A, B\}$, et puisque $s(A) \neq A$ (autrement $A \in (OI)$, ce qui est absurde), on peut conclure à $s(A) = B$.

Les points O et I sont donc à égale distance des extrémités du segment $[AB]$. La droite (OI) est donc la médiatrice Δ_{AB} de $[AB]$. Bien entendu, Δ_{AB} passe par le milieu J de $[AB]$ en étant perpendiculaire au segment $[AB]$. On peut donc affirmer que la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à la droite (AB) n'est autre que la réflexion s par rapport à $\Delta_{AB} = (OI)$, et conclure en rappelant que (OI) étant un axe de symétrie du cercle $\mathcal{E}$, on a évidemment $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Remarque : Dans l'étude du cas particulier du cercle, le résultat-clé consiste à prouver que les points O, I et J sont alignés sur la médiatrice de $[AB]$. Puisque O et J sont évidemment sur cette médiatrice, il s'agit de démontrer que $IA = IB$. La démonstration précédente utilise les propriétés des réflexions, mais ce n'est pas la seule méthode possible. En voici deux autres :

- On écrit la puissance $p_{\mathcal{E}}(I)$ du point I par rapport au cercle $\mathcal{E}$ de deux façons différentes, pour obtenir $IA^2 = IB^2$, donc $IA = IB$.

- On utilise le Théorème de Pythagore dans les deux triangles OAI et OBI qui ont même hypoténuse, pour obtenir $OI^2 = OA^2 + AI^2 = OB^2 + BI^2$, et en déduire $IA = IB$.

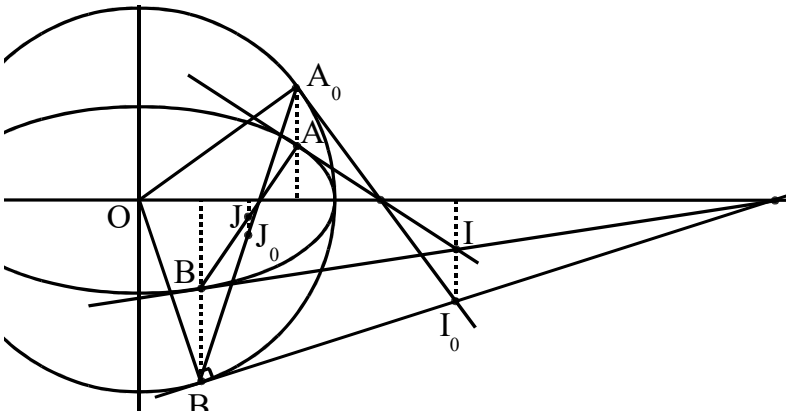


FIG. 4.14 – Le cas général

► *Cas général.* Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ soit une ellipse $\mathcal{E}$ d'axes de symétrie Ox et Oy, d'axe focal Ox. Une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormal d'origine O et d'axes Ox, Oy est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$, et l'affinité orthogonale f de base Ox et de rapport b/a transforme le cercle principal $\mathcal{C}_a$ de l'ellipse en l'ellipse. Notons A_0, B_0, I_0, J_0 les antécédents des points A, B, I, J par f (FIG. 4.14).

Les points A_0 et B_0 appartiennent au cercle principal. L'application f est affine, donc conserve les milieux, et l'antécédent J_0 du milieu J de $[AB]$ sera nécessairement le milieu de $[A_0B_0]$. Soit $f(J_0) = J$.

Si $T_{A,0}$ désigne la tangente à $\mathcal{C}_a$ en A_0, son image par f est une droite qui coupe l'ellipse en un seul point (conservation des contacts par une bijection affine), donc une tangente à l'ellipse. Ainsi $f(T_{A,0}) = T_A$ représente la tangente à $\mathcal{E}$ issue de A. Avec des notations évidentes, on aura aussi $f(T_{B,0}) = T_B$. Par conséquent, si I_0 désigne l'intersection des tangentes au cercle $T_{A,0}$ et $T_{B,0}$:

$$f(\{I_0\}) = f(T_{A,0} \cap T_{B,0}) = f(T_{A,0}) \cap f(T_{B,0}) = T_A \cap T_B = \{I\},$$

donc $f(I_0) = I$. Le cas particulier du cercle permet d'affirmer que $\mathcal{C}_a$ est invariant symétrie par rapport à (I_0J_0) parallèlement à la droite (A_0B_0). Notons s_{OI_0} la réflexion par rapport à (OI_0), et posons $s = f \circ s_{OI_0} \circ f^{-1}$. On a

$$s(\mathcal{E}) = f \circ s_{OI_0} \circ f^{-1}(\mathcal{E}) = f \circ s_{OI_0}(\mathcal{C}_a) = f(\mathcal{C}_a) = \mathcal{E},$$

de sorte que s laisse l'ellipse invariante. Pour conclure, il suffit maintenant de prouver que s est égale à la symétrie gauche σ par rapport à (IJ) parallèlement à la droite (AB), ou, ce qui revient au même, que s et σ coïncident sur chacun des points non alignés I, J et A. On calcule :

$$\begin{aligned}
s(I) &= f \circ s_{OI_0} \circ f^{-1}(I) = f \circ s_{OI_0}(I_0) = f(I_0) = I = \sigma(I), \\
s(J) &= f \circ s_{OI_0} \circ f^{-1}(J) = f \circ s_{OI_0}(J_0) = f(J_0) = J = \sigma(J), \\
s(A) &= f \circ s_{OI_0} \circ f^{-1}(A) = f \circ s_{OI_0}(A_0) = f(B_0) = B = \sigma(A).
\end{aligned}$$

4.3.4 Ellipse de Steiner

La partie D du problème du §. 4.1 montre que, si a, b, c sont les affixes des sommets A, B, C d'un triangle ABC non équilatéral, et si $f(X)$ est le polynôme

$$f(X) = (X-a)(X-b)(X-b),$$

alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes des foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle ABC en leurs milieux.

L'ellipse obtenue de cette façon est en fait unique, et il s'agit de l'*ellipse de Steiner du triangle ABC*.

Voici un exercice d'entraînement tiré des questions D.1.b, D.1.c et D.1.d de la composition n°2 du CAPES externe 1990 dans lequel on montre l'existence et l'unicité de cette ellipse. C'est un bon entraînement sur les coniques :

Exercice 4.5 *(Ecrit du CAPES externe 1990)*
On admet le résultat suivant : "si A et B sont deux points distincts d'une ellipse $\mathcal{E}$, si les tangentes T_A et T_B à $\mathcal{E}$ issues de A et B se coupent en I, et si J est le milieu de $[AB]$, alors $\mathcal{E}$ est invariante par la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (AB)" ([8]).

a) On considère un triangle équilatéral ABC. On note $\mathcal{C}$ le cercle inscrit à ce triangle, et A', B', C', les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que $\mathcal{C}$ est la seule ellipse tangente aux droites (BC), (CA) et (AB) en A', B' et C'.

b) On ne suppose plus ABC équilatéral. Montrer qu'il existe une et une seule ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux droites (BC), (CA) et (AB) en A', B' et C' respectivement. Cette ellipse est appelée ellipse de Steiner *du triangle ABC. Quel est son centre de symétrie ?*

c) Montrer que l'ellipse de Steiner d'un triangle non équilatéral n'est jamais un cercle.

Solution : a) *Existence* : Comme ABC est équilatéral, ses bissectrices intérieures, les médianes et les médiatrices des côtés coïncident (FIG. 4.15). Le cercle $\mathcal{C}$ inscrit à ABC est donc de centre l'intersection O des médiatrices des côtés. Comme (AO) coupe $[BC]$ en A', et comme $(AO) \perp (BC)$, (BC) sera bien tangent à $\mathcal{C}$ en A'.

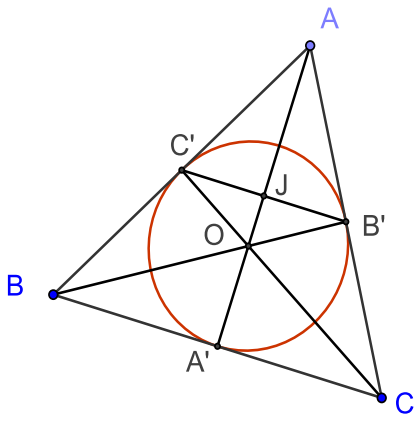


FIG. 4.15 – Cas particulier d'un cercle

Unicité : Si $\mathcal{E}$ est une ellipse tangente aux droites (BC), (CA) et (AB) en A', B' et C', la propriété admise montre que $\mathcal{E}$ est invariante par la symétrie s par rapport à (AJ), parallèlement à $(B'C')$, où J est le milieu de $[B'C']$.

[8] Voir Exercice n°4.4.

Ici $(B'C')$ est parallèle à (BC) (d'après le Théorème de la droite des milieux ou la réciproque du Théorème de Thalès). Comme (BC) est perpendiculaire à (AO), on en déduit que $(B'C')$ est aussi perpendiculaire à (AO).
Les points A, J et O sont à égale distance des extrémités du segment $[B'C']$, donc sont alignés sur la médiatrice de $[B'C']$. Par suite $(AO) = (AJ)$, et $(AJ) \perp (B'C')$. La symétrie s est donc orthogonale, et la droite (AO) est un axe de symétrie de $\mathcal{E}$.
De même (BO) et (CO) seront des axes de symétrie de $\mathcal{E}$. L'ellipse $\mathcal{E}$ admettra trois axes de symétrie, donc sera un cercle : $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

b) *Unicité* : Soit $A_1B_1C_1$ un triangle équilatéral, et f l'application affine qui transforme A, B, C en A_1, B_1, C_1. Une telle application existe puisque (A, B, C) est un base affine du plan, et c'est une bijection puisqu'elle transforme une base affine en une base affine.

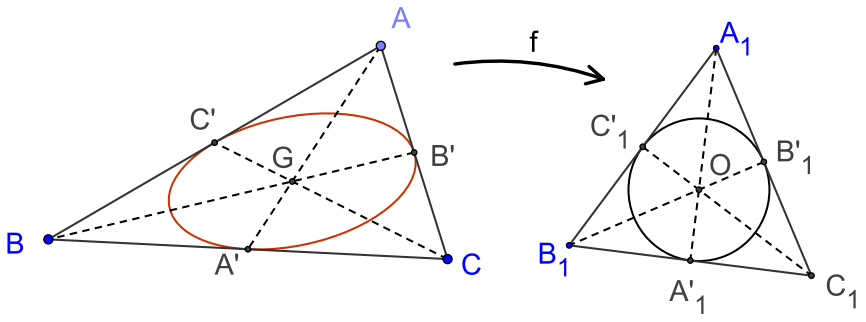


FIG. 4.16 – Cas général

S'il existe une ellipse $\mathcal{E}$ répondant à la question, son image $f(\mathcal{E})$ par f est une ellipse inscrite dans le triangle équilatéral $A_1B_1C_1$, tangente aux côtés de ce triangle en les milieux A'_1, B'_1, C'_1 de ceux-ci (FIG. 4.16). La question précédente montre que $f(\mathcal{E})$ est égale au cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans $A_1B_1C_1$. Donc nécessairement

$$\mathcal{E} = f^{-1}(\mathcal{C}).$$

L'unicité de $\mathcal{E}$ est démontrée.

Existence : L'existence de $\mathcal{E}$ ne fait aucun doute car il est facile de voir que $f^{-1}(\mathcal{C})$ est une ellipse tangente aux côtés de ABC (une bijection affine transforme une droite en une droite et conserve les contacts) en leurs milieux (une application affine conserve les milieux).

Centre de $\mathcal{E}$: On sait qu'une bijection affine conserve les centres de symétrie. Autrement dit, si O désigne le centre du cercle inscrit dans $A_1B_1C_1$, le centre de symétrie de $\mathcal{E} = f^{-1}(\mathcal{C})$ sera $f^{-1}(O)$. Mais O est aussi l'isobarycentre des points A_1, B_1, C_1. Comme une application affine conserve les barycentres, $f^{-1}(O)$ sera aussi l'isobarycentre des points A, B, C. Le centre de $\mathcal{E}$ est donc égal au centre de gravité G du triangle ABC.

c) Si l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC est un cercle $\mathcal{C}$, son centre est le centre de gravité G du triangle, et comme $\mathcal{C}$ admet (BC) comme tangente en A', on obtient $(GA') \perp (BC)$. La médiane (GA') coïncide ainsi avec la médiatrice de $[BC]$, d'où $AB = AC$.
De même que (GB') est la médiatrice de $[AC]$, d'où $AB = BC$. Finalement $AB = BC = AC$ et le triangle ABC est équilatéral. En conclusion :

> Si l'ellipse de Steiner d'un triangle est un cercle, le triangle est équilatéral.

La contraposée de cette affirmation s'énonce alors :

> L'ellipse de Steiner d'un triangle non équilatéral n'est pas un cercle.

Chapitre 5

CAPES externe 2010, épreuve 2

5.1 Énoncé

Notations

◇ Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sera noté plus simplement (a_n). On note (0) la suite constante dont tous les termes sont nuls et on rappelle que deux suites (a_n) et (b_n) sont égales si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$.

◇ Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit leur somme $(a_n)+(b_n)$, leur produit $(a_n) \times (b_n)$ et le produit d'une suite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ respectivement par :

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$,
$(a_n) \times (b_n) = (c_n)$ où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,
$\lambda.(a_n) = (\lambda a_n)$.

◇ On admet que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif d'élément nul (0).

◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera X^p la suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_p = 1 \\ a_n = 0 \text{ si } n \neq p. \end{cases}$$

On écrira aussi X^0 et X^1 respectivement 1 et X.

[0] [ag80e] v1.01

$\diamond$ Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I - Série génératrice d'une suite (a_n)

1) **Propriétés algébriques**

1.a) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif dont on précisera l'élément neutre.

1.b) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est intègre. (Indication : si (a_n) est un élément non nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pourra considérer le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$.)

1.c) Montrer qu'un élément (a_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est inversible dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

1.d) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les résultats précédents montrent que toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ peut s'écrire formellement sous la forme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$. Lorsqu'on note $A(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ ou $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, alors $A(X)$ ou A sera appelée série génératrice de la suite (a_n).

On remarque que par définition du produit des suites on a $X^p \times X^q = X^{p+q}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. D'autre part, si A est une série génératrice, pour tout entier $k \geq 2$, A^k désigne le produit $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k \text{ facteurs}}$.

On remarquera aussi que s'il existe un entier p tel que $a_p \neq 0$ et tel que pour tout entier $n > p$ on a $a_n = 0$ alors la série génératrice de la suite (a_n) n'est autre qu'un polynôme de degré p qu'on notera $\sum_{n=0}^{p} a_n X^n$.

D'après la question l.c) ci-dessus, la série génératrice $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans toute la suite, si la série génératrice $A(X)$ est inversible, on écrira son inverse sous la forme $\frac{1}{A(X)}$. Plus généralement si la série génératrice $A(X)$ est inversible et si $B(X)$ est une série génératrice quelconque, le produit $B(X) \times \frac{1}{A(X)}$ sera noté $\frac{B(X)}{A(X)}$. Si de plus $B(X)$ et $A(X)$ sont des séries génératrices sous la forme de polynômes alors $\frac{B(X)}{A(X)}$ peut être assimilée à une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ et on admet que les techniques de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ restent valables pour $\frac{B(X)}{A(X)}$.

2) **Éléments inversibles**

2.a) Montrer que la série génératrice inversible $\sum_{n\geq 0} X^n$ a pour inverse $1 - X$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geq 0} X^n.$$

2.b) Soit $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, montrer que :

$$\frac{1}{1-aX} = \sum_{n\geq 0} a^n X^n.$$

2.c) Soient $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ avec $a \neq b$, montrer que :

$$\frac{1}{(1-aX)\times(1-bX)} = \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}.$$

3) **L'opérateur de dérivation**

L'opérateur de dérivation, $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est défini par :

$$D: \ A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \ \mapsto \ D(A) = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

3.a) Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Soient A et B deux séries génératrices. Montrer que :

3.b) $D(A\times B) = D(A)\times B + A\times D(B)$.

(On pourra commencer par traiter le cas où $A = X^p$ et $B = X^q$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.)

3.c) Si B est inversible,

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{D(A)\times B - A\times D(B)}{B^2}.$$

4) **Quelques exemples**

4.a) Montrer que la suite (a_n) dont la série génératrice est :

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^2}$$

est définie pour tout entier n par $a_n = n+1$.

4.b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est :

$$A_p(X) = \frac{1}{(1-X)^p}$$

est définie pour tout entier n par :

$$a_{p,n} = \binom{n+p-1}{n}.$$

4.c) Soit $A(X)$ la série génératrice d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\dfrac{A(X)}{1-X}$ est la série génératrice de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

4.d) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}.$$

Partie II - Séries génératrices et suites récurrentes

1) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = 2a_n + n. \end{cases}$$

On se propose de déterminer la formule explicite de a_n en fonction de n. On note $A(X)$ la série génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.a) Montrer que :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n\geq 0}(n+1)X^n.$$

1.b) Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2}{(1-X)^2 \times (1-2X)}.$$

1.c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

2) On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

et on note $F(X)$ la série génératrice de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.a) Montrer que :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

2.b) En déduire l'expression de F_n en fonction de n.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre k ($k > 1$).
Soit $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k$ avec $a_k \neq 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites complexes (u_n) définies par la donnée de $(u_0, ..., u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et par la relation de récurrence

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}.$$

(On utilisera, sans le démontrer, le fait que $(\mathcal{U}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.)
Soit $(u_n) \in \mathcal{U}$. On note S la série génératrice de (u_n), et (E) l'équation caractéristique de (u_n) :

$$z^k = a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + ... + a_k \quad (E).$$

3.a) Montrer que $\phi : (u_n) \in \mathcal{U} \mapsto (u_0, u_1, ..., u_{k-1})$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}^k$.

3.b) On pose $Q(X) = 1 - a_1 X - ... - a_k X^k$ et $P(X) = Q(X) \times S(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

3.c) On note z_1, ..., z_p les racines dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) et α_1, ..., α_p les ordres de multiplicité respectifs de z_1, ..., z_p. Montrer qu'il existe des nombres complexes $b_{i,j}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq \alpha_i$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right).$$

3.d) Montrer alors qu'il existe des polynômes R_1, ..., R_p tels que pour tout n

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n)\, z_i^n \quad \text{où } \forall i,\ \deg(R_i) < \alpha_i.$$

3.e) On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites (v_n) dont le terme général s'écrit $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)\, z_i^n$ où pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, P_i est un polynôme tel que $\deg(P_i) < \alpha_i$. Démontrer que $(\mathcal{V}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont la dimension vérifie l'inégalité $\dim \mathcal{V} \leq k$ et déduire que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Partie III - Nombre de partitions d'un ensemble

Soient $k \geq 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ est une partition de S en k classes si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, ..., k\}, \quad S_i \neq \varnothing \\ \forall (i, j) \in \{1, 2, ..., k\}^2, \quad S_i \cap S_j = \varnothing \text{ si } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{k} S_i = S. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in \{1, 2, ..., n\}$ on note $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k classes. On pose par convention :

- $\diamond$ Pour tout entier $n \geq 1$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$,
- $\diamond$ Pour tout entier $k > n$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$,
- $\diamond$ $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

1) Donner toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 2 classes. Cette question montre que $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. On se propose dans ce qui suit de calculer $\left\{ {n \atop k} \right\}$ en fonction de n et k.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

(On fixera un élément $s \in S$ et on considérera les partitions contenant le singleton $\{s\}$ et les partitions qui ne le contiennent pas).

3) On considère la série génératrice

$$A_k(X) = \sum_{n \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} X^n.$$

3.a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$A_k(X) = X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X).$$

3.b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\prod_{m=1}^{k} (1 - mX)}.$$

3.c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{k}(1-mX)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{1-rX}.$$

où, pour tout $r \in \{1,...,k\}$, $\alpha_r = (-1)^{k-r} \dfrac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$.

3.d) En déduire que, pour tout entier $n \geq k$:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}.$$

4) Application : nombre de surjections.
On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal p où n et p sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n,p)$ de surjections de E sur F.

4.a) Que vaut $S(n,p)$ lorsque $p > n$?

4.b) Que vaut $S(n,n)$?

4.c) On suppose maintenant que $p \in \{1,...,n\}$. Montrer que :

$$S(n,p) = p! \left\{ {n \atop p} \right\}.$$

Partie IV - Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,...,n\}$.
Un dérangement de l'ensemble $\{1,...,n\}$ est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1,2,...,n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1,...,n\}$.
On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$.

1) Calculer d_1, d_2 et d_3.

2) Pour $0 \leq k \leq n$, on note B_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

2.a) Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité $\text{Card}(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!.$$

2.b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n). Montrer que

$$E(X) \times P(X) = \sum_{n\geq 0} X^n, \quad \text{où } E(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

2.c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$.

2.d) En déduire que

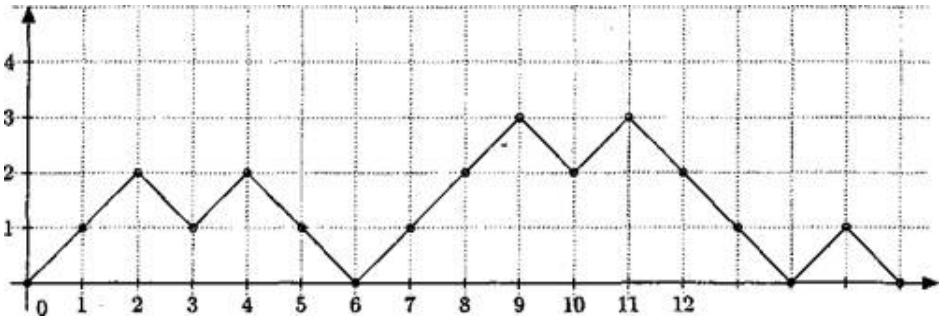
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie V - Nombres de Catalan

1) **Chemins de Dyck**

Le plan est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$, toute suite $(s_0, ..., s_{2n})$ de points du plan dont les coordonnées sont des entiers positifs tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et, tels que, pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., 2n-1\}$, s_{k+1} est l'image de s_k par une translation de vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ou de vecteur $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

Voici un chemin de Dyck de longueur 16.



On note c_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Les nombres c_n sont appelés **nombres de Catalan**. Pour tout chemin de Dyck $\mathcal{C} = (s_0, ..., s_{2n})$ de longueur $2n$ on note $k(\mathcal{C})$ le plus petit entier tel que $s_{k(\mathcal{C})}$ soit d'ordonnée nulle et d'abscisse non nulle.

1.a) Justifier que $k(\mathcal{C})$ est un entier pair.

1.b) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2n$ est égal à c_{n-1}.

1.c) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ avec $p \in \{1, ..., n-1\}$ est égal à $c_{p-1}c_{n-p}$. (Par convention, on pose $c_0 = 1$).

1.d) En déduire que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1} c_{n-j}.$$

2) **Expression des nombres de Catalan**
Soit r un nombre rationnel positif. On définit les coefficients binomiaux généralisés par :

$$\begin{cases} \binom{r}{0} = 1 \\ \binom{r}{n} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (r-k) \quad \text{pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique série génératrice $S(X) = \sum_{n\geq 0} s_n X^n$ telle que :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ S(X)^2 = 1 - 4X \end{cases}$$

et que cette série génératrice est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-4)^n X^n.$$

2.a) Montrer que

$$S(X) = 1 - \sum_{n\geq 0} \frac{2}{(n+1)} \binom{2n}{n} X^{n+1}.$$

2.b) On pose

$$H(X) = \frac{1}{2}\left(1 - S(X)\right).$$

Vérifier que $H(X) = X + (H(X))^2$.

3) Soit $C(X)$ la série génératrice de la suite $(c_{n)}$ des nombres de Catalan.

3.a) Montrer que $X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$.

3.b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$c_n = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n}.$$

puis que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

5.2 Corrigé

Partie I - Série génératrice d'une suite (a_n)

I.1.a. Je noterai a la suite (a_n), et $[a]_n$ le n-ième terme de la suite $a = (a_n)$, de sorte que $[a]_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif car :

- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif (admis par l'énoncé).
- La loi $\times$ est interne dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- La multiplication $\times$ est commutative car pour tous a, $b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $n \in \mathbb{N}$,

$$[a \times b]_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k'=0}^{n} a_{n-k'} b_{k'} = [b \times a]_n$$

donc $a \times b = b \times a$.

- La multiplication $\times$ est associative. En effet, si a, b, c appartiennent à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}[(a \times b) \times c]_n = \sum_{k=0}^{n} [a \times b]_k \, c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} c_{n-k} \quad (1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[a \times (b \times c)]_n = \sum_{k=0}^{n} a_k [b \times c]_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j c_{n-k-j} \quad (2)\end{aligned}$$

Pour voir que les expressions (1) et (2) sont égales, on peut ré-écrire la première expression ([1]) :

$$[(a \times b) \times c]_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} c_{n-k}$$

[0] [ag80] v1.01, correction de D.-J. Mercier.

[1] En remarquant que l'ensemble A des couples d'indices (k, i) tels que $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq i \leq k$ coïncide avec l'ensemble B des couples (k, i) tels que $0 \leq i \leq n$ et $i \leq k \leq n$. Le lecteur pourra visualiser les ensembles A et B sur lesquels porte la somme double dans un plan rapporté à deux axes perpendiculaires (l'axe des k et l'axe des i), et constater qu'il obtient le même "triangle".

et faire le changement d'indices $k - i = j$:

$$[(a \times b) \times c]_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j c_{n-i-j} = [a \times (b \times c)]_n.$$

Remarque : Une autre façon de conclure est de s'apercevoir que les expressions (1) et (2) s'écrivent toutes deux $\sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$.

• La multiplication $\times$ est distributive sur l'addition car si a, b, $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}[a \times (b+c)]_n = \sum_{k=0}^{n} a_k [b+c]_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \\ &= [a \times b]_n + [a \times c)]_n \\ &= [(a \times b) + (a \times c)]_n.\end{aligned}$$

• La suite $e = (1, 0, 0, ...) = 1$ est l'élément neutre pour la multiplication. $e = (e_n)$ est définie par $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on a bien :

$$\forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [a \times e]_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_{n-k} = a_n,$$

soit $a \times e = a$. Et bien sûr $e \times a = a$ puisque la loi $\times$ est commutative.

I.1.b. Montrer que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est intègre revient à montrer que :

$$a \times b = 0 \ \Rightarrow \ (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

ou, si l'on préfère, la contraposée de cette implication :

$$(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \ \Rightarrow \ a \times b \neq 0. \quad (*)$$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, soient $k = \text{Min}\{n \in \mathbb{N} \,/\, a_n \neq 0\}$ et $m = \text{Min}\{n \in \mathbb{N} \,/\, b_n \neq 0\}$. Ces minima existent car $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné, autrement dit toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, et $\{n \in \mathbb{N} \,/\, a_n \neq 0\}$ n'est pas vide lorsque $a \neq 0$.
Dans ce cas :

$$[a \times b]_{k+m} = \sum_{i=0}^{k+m} a_i b_{k+m-i} = \sum_{i=k}^{k+m} a_i b_{k+m-i} = a_k b_m \neq 0$$

donc $a \times b \neq 0$. On a prouvé l'implication $(*)$.

I.1.c. En notant toujours $a = (a_n)$,

$$\begin{aligned} a \text{ inversible } &\Leftrightarrow \exists b = (b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad a \times b = 1 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [a \times b]_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad [a \times b]_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_0 b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}. \ (*) \end{array} \right. \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

On a donc :

$$a \text{ inversible } \Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0.$$

La réciproque est vraie puisque si $a_0 \neq 0$, alors il existe $b_0 \in \mathbb{K}$ tel que $a_0 b_0 = 1$ (prendre $b_0 = 1/a_0$), et puisque les égalités $(*)$ permettent de définir les coefficients b_n de b de proche en proche grâce à la formule récurrente[2] :

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k},$$

ce qui permet d'obtenir $(\dagger)$ et de remonter les équivalences écrites plus haut. En conclusion :

$$a \text{ inversible } \Leftrightarrow a_0 \neq 0.$$

I.1.d. Montrer que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel revient à montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif (ce qui a été admis par l'énoncé) et que la loi externe

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}) & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, a) & \mapsto & \lambda.a \end{array}$$

est bien définie (évident !) et satisfait les quatre axiomes habituels d'un espace vectoriel, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & 1.a = a & (1) \\ \forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} & (\lambda\mu).a = \lambda.(\mu.a) & (2) \\ \forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} & (\lambda + \mu).a = \lambda.a + \mu.a & (3) \\ \forall a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda.(a + b) = \lambda.a + \lambda.b & (4) \end{array} \right.$$

Tous ces axiomes sont faciles à vérifier en retournant à la définition. Par exemple, pour vérifier l'assertion (3), il suffit d'écrire pour tout entier naturel n :

$$[(\lambda + \mu).a]_n = (\lambda + \mu).a_n = \lambda.a_n + \mu.a_n = [\lambda.a]_n + [\mu.a]_n.$$

[2] b est alors une suite définie par récurrence ! Pourriez-vous répondre à un examinateur d'oral qui poserait la question de savoir ce que l'on veut dire par là ?

I.2.a. On a[3] :

$$\begin{aligned}(1-X)\times\sum_{n\geq 0}X^n &= \sum_{n\geq 0}X^n - X\times\sum_{n\geq 0}X^n\\ &= \sum_{n\geq 0}X^n - \sum_{n\geq 0}X^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n\geq 1}X^n - \sum_{n\geq 1}X^n \;=\; 1\end{aligned}$$

donc $\sum_{n\geq 0}X^n$ est l'inverse de $1-X$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ identifié à l'anneau des séries formelles.

Remarque : Si on le préfère, on peut répondre à cette question sans faire appel aux commodités offertes par l'écriture d'une suite sous la forme d'une série formelle. Dans ce cas, notons $1-X=(a_n)$ et $\sum_{n\geq 0}X^n=(b_n)$, où $a_0=1$, $a_1=-1$, $a_n=0$ si $n>1$, et $b_n=1$ quel que soit n.
Par définition du produit :

$$(1-X)\times\sum_{n\geq 0}X^n=(c_n)$$

où

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}=1\times 1+(-1)\times 1=0$$

si $n\geq 1$, et aussi $c_0=a_0b_0=1$. Cela montre que $(c_n)=1$ (élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) et que $(1-X)\times\sum_{n\geq 0}X^n=1$.

I.2.b. On recommence :

$$\begin{aligned}(1-aX)\times\sum_{n\geq 0}a^nX^n &= \sum_{n\geq 0}a^nX^n - aX\times\sum_{n\geq 0}a^nX^n\\ &= \sum_{n\geq 0}a^nX^n - \sum_{n\geq 0}a^{n+1}X^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n\geq 1}a^nX^n - \sum_{n\geq 1}a^nX^n \;=\; 1\end{aligned}$$

[3]On travaille dans l'anneau $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec de nouvelles notations, c'est-à-dire en écrivant $\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ pour la suite $a=(a_n)$. On identifie donc l'algèbre des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec l'algèbre des séries formelles dont les éléments sont les séries génératrices des suites. Cette identification est pratique, puisque la nouvelle façon d'appeler les suites nous permet d'effectuer des calculs "comme on en a l'habitude" avec des polynômes. Par exemple, les assertions $\lambda(\sum_{n\geq 0}a_nX^n)=\sum_{n\geq 0}\lambda a_nX^n$ et $X\times(\sum_{n\geq 0}a_nX^n)=\sum_{n\geq 0}a_nX^{n+1}$ sont vraies en toute généralité. Pour plus de renseignements, voir § 5.3.1.

donc

$$\frac{1}{1-aX} = \sum_{n\geq 0} a^n X^n.$$

I.2.c. *Première solution* : L'inverse d'un produit est égal au produit des inverses (lorsque ceux-ci existent). La question précédente donne donc :

$$\frac{1}{(1-aX)\times(1-bX)} = \left(\sum_{n\geq 0} a^n X^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b^n X^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) X^n.$$

Posons

$$C = \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}.$$

Alors

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{a}{a-b}\right)\sum_{n\geq 0} a^n X^n + \left(\frac{b}{b-a}\right)\sum_{n\geq 0} b^n X^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{a}{a-b}a^n + \frac{b}{b-a}b^n\right) X^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} X^n. \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{K}$, on connaît l'identité remarquable :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + ... + b^n\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k},$$

et il suffit de remplacer pour obtenir ce que l'on voulait :

$$C = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) X^n = \frac{1}{(1-aX)\times(1-bX)}.$$

Seconde solution : On vérifie que le produit

$$(1-aX)\times(1-bX)\times\left[\left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}\right],$$

qui s'écrit

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)(1-bX) + \left(\frac{b}{b-a}\right)(1-aX),$$

est bien égal à 1.

I.3.a. Si $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, si $B = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ et si λ désigne un scalaire quelconque, $A + \lambda B = \sum_{n\geq 0}(a_n + \lambda b_n)X^n$ donc :

$$\begin{aligned} D(A + \lambda B) &= \sum_{n\geq 0} n(a_n + \lambda b_n)X^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} n a_n X^{n-1} + \lambda \sum_{n\geq 0} n b_n X^{n-1} \\ &= D(A) + \lambda D(B). \end{aligned}$$

D est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

I.3.b. • *Première méthode : Emploi de la vive force.*

Si $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $B = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$,

$$\begin{aligned} &D(A) \times B + A \times D(B) \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} (n+1)\, a_{n+1} X^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} (n+1)\, b_{n+1} X^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \xi_n X^n \end{aligned}$$

en posant

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\, a_{k+1} b_{n-k} + a_k\,(n-k+1)\, b_{n-k+1}\right).$$

D'autre part :

$$D(A \times B) = D\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n\right) = \sum_{n\geq 0} \zeta_n X^n$$

où $\zeta_n = (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}\right)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\xi_n = \zeta_n$.

On a :

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, a_{k+1} b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k\, (n-k+1)\, b_{n-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} k' a_{k'} b_{n-k'+1} + \sum_{k=0}^{n} (n-k+1)\, a_k b_{n-k+1} \\
&= (n+1)\, a_{n+1} b_0 + \sum_{k'=1}^{n} k' a_{k'} b_{n-k'+1} + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_0 b_{n+1} \\
&= (n+1)\, a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^{n} (n+1)\, a_k b_{n-k+1} + (n+1)\, a_0 b_{n+1} \\
&= (n+1) \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right) \;=\; \zeta_n.
\end{aligned}$$

• *Seconde méthode : Utilisation de la linéarité de D.*

On commence par démontrer l'égalité lorsque $A = X^p$ et $B = X^q$, puis on passe au cas général en utilisant la linéarité de D, en prenant bien garde de n'employer celle-ci que sur des *combinaisons linéaires finies* de séries formelles (et non pas sur des sommes infinies !).

- *Preuve de la formule quand $A = X^p$ et $B = X^q$.*
Si $p \geq 1$ et $q \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
D(A) \times B + A \times D(B) &= (pX^{p-1}) \times X^q + X^p \times (qX^{q-1}) \\
&= pX^{p+q-1} + qX^{p+q-1} \\
&= (p+q)\, X^{p+q-1} \\
&= D(X^{p+q}) \\
&= D(A \times B)
\end{aligned}$$

donc tout va bien. Si $p = 0$ ou $q = 0$, on n'a que trois cas à envisager, ceux où (p, q) vaut $(0, 0)$, $(0, 1)$ ou $(1, 0)$, et ces cas se traitent séparément sans difficulté. Par exemple, si $(p, q) = (0, 1)$, $A = 1$ et $B = X$ donc

$$\begin{aligned}
D(A) \times B + A \times D(B) &= 0 \times B + A \times 1 \\
&= 1 \;=\; D\,(X) \;=\; D(A \times B).
\end{aligned}$$

La formule est donc prouvée quand $A = X^p$ et $B = X^q$ quel que soit le couple d'entiers naturels (p, q).

- *Preuve dans le cas général* : Si A est une série formelle, l'idée est de l'écrire comme la somme d'un polynôme A_n de degré $\leq n$ et d'une série formelle $X^{n+1}A_{(n)}$ de valuation $\geq n+1$. Si $A = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$,

$$A = A_n + X^{n+1}A_{(n)}$$

où $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $X^{n+1}A_{(n)} = \sum_{k>n} a_k X^k$.
On fait de même avec B pour avoir $B = B_n + X^{n+1}B_{(n)}$ où $B_n \in \mathbb{K}[X]$ et $B_{(n)} \in \mathbb{K}[[X]]$. Alors

$$AB = A_nB_n + X^{n+1}C$$

où $C = A_{(n)}B_n + A_nB_{(n)} + X^{n+1}A_{(n)}B_{(n)}$. La linéarité de D et la formule appliquée dans le cas particulier où $A = X^p$ *et* $B = X^q$, permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} D(AB) &= D(A_nB_n) + D(X^{n+1}C) \\ &= D(A_n)B_n + A_nD(B_n) + D(X^{n+1}C) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D(A)B + AD(B) &= \left[D(A_n) + D(X^{n+1}A_{(n)})\right] B \\ &\quad + A\left[D(B_n) + D(X^{n+1}B_{(n)})\right] \\ &= D(A_n)B + AD(B_n) \\ &\quad + D(X^{n+1}A_{(n)})B + AD(X^{n+1}B_{(n)}) \end{aligned}$$

On remarque que $D(X^{n+1}C) = D(X^{n+1})C + X^{n+1}D(C)$ ne contient pas de monôme de degrés $< n$, ce que l'on traduit en disant que la valuation de $D(X^{n+1}C)$ est $\geq n$. En utilisant cette remarque et les égalités précédentes, on constate qu'il existe des fractions rationnelles U et V telles que :

$$\begin{cases} D(AB) = D(A_n)B_n + A_nD(B_n) + X^nU \\ D(A)B + AD(B) = D(A_n)B + AD(B_n) + X^nV. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} D(A_n)B + AD(B_n) &= D(A_n)\left(B_n + X^{n+1}B_{(n)}\right) + \left(A_n + X^{n+1}A_{(n)}\right)D(B_n) \\ &= D(A_n)B_n + A_nD(B_n) + X^nW \end{aligned}$$

pour une certaine série formelle W. Finalement :

$$\begin{cases} D(AB) = D(A_n)B_n + A_nD(B_n) + X^nU \\ D(A)B + AD(B) = D(A_n)B_n + A_nD(B_n) + X^nW \end{cases}$$

donc

$$D(AB) - (D(A)B + AD(B)) = X^n (U - W).$$

Cela prouve que tous les coefficients des séries $D(AB)$ et $D(A)B + AD(B)$ correspondant aux termes de degrés $\leq n-1$, sont égaux. Comme cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient bien $D(AB) = D(A)B + AD(B)$.

I.3.c. La question précédente donne :

$$D(A) = D\left(\frac{A}{B} \times B\right) = D\left(\frac{A}{B}\right) \times B + \frac{A}{B} \times D(B).$$

En multipliant les deux membres par B, on trouve :

$$D\left(\frac{A}{B}\right) \times B^2 = D(A) \times B - A \times D(B),$$

puis en multipliant les deux membres par l'inverse $1/B^2$ de B^2 :

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{D(A) \times B - A \times D(B)}{B^2}.$$

I.4.a. *Première solution* : Notons $(1-X)^2 = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ où $b_0 = 1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 1$ et $b_n = 0$ si $n \geq 3$. L'inverse $A(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ de $(1-X)^2$ est caractérisé par l'égalité

$$(1-X)^2 \times A(X) = 1$$

qui s'écrit :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n b_0 = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n = -a_{n-1} b_1 - a_{n-2} b_2 = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \end{cases}$$

Il est alors facile de montrer que $a_n = n+1$ pour tout n, en raisonnant par récurrence sur n. L'égalité est vraie si $n = 0$ ou 1, et si elle est vraie jusqu'au rang $n-1$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$, donc elle est vraie jusqu'au rang n. En conclusion :

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

où $a_n = n+1$ quel que soit n.

Seconde solution : On a

$$D\left(\frac{1}{1-X}\right) = \frac{0\times(1-X)-(-1)}{(1-X)^2} = \frac{1}{(1-X)^2}$$

donc

$$\frac{1}{(1-X)^2} = D\left(\sum_{n\geq 0} X^n\right) = \sum_{n\geq 0}(n+1)X^n.$$

I.4.b. On montre la formule par récurrence sur p. La formule est vraie si $p=1$ (question I.2.a) ou $p=2$ (question I.4.a). Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang p, et montrons-la au rang $p+1$. On montre un peu plus bas dans un lemme que

$$D\left(\frac{1}{(1-X)^p}\right) = \frac{p}{(1-X)^{p+1}},$$

de sorte que l'on puisse écrire (en appliquant l'hypothèse récurrente) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-X)^{p+1}} &= \frac{1}{p}D\left(\frac{1}{(1-X)^p}\right)\\ &= \frac{1}{p}D\left(\sum_{n\geq 0} a_{p,n}X^n\right)\\ &= \frac{1}{p}\sum_{n\geq 0}(n+1)\,a_{p,n+1}X^n.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\frac{1}{(1-X)^{p+1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{p}\binom{n+p}{n+1}X^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+p}{n}X^n$$

puisque

$$\frac{n+1}{p}\binom{n+p}{n+1} = \frac{n+1}{p}\frac{(n+p)!}{(n+1)!\,(p-1)!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \binom{n+p}{n}.$$

La propriété est démontrée jusqu'au rang $p+1$, et cela achève notre raisonnement.

Lemme : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(1): \quad D\left((1-X)^p\right) = -p(1-X)^{p-1}$$
$$(2): \quad D\left(\frac{1}{(1-X)^p}\right) = \frac{p}{(1-X)^{p+1}}.$$

Preuve du Lemme : La formule (1) est évidente si $p = 1$. Si elle est vraie au rang $p-1$, on peut écrire (d'après I.3.b) :

$$\begin{aligned} D\left((1-X)^p\right) &= D\left((1-X)^{p-1} \times (1-X)\right) \\ &= D\left((1-X)^{p-1}\right) \times (1-X) + (1-X)^{p-1} \times D\left((1-X)\right) \\ &= -(p-1)(1-X)^{p-2} \times (1-X) + (1-X)^{p-1} \times (-1) \\ &= -p(1-X)^{p-1}, \end{aligned}$$

ce qui la prouve au rang p. L'assertion (1) est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer (2), on utilise (I.3.c) et la formule(1) :

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{(1-X)^p}\right) &= \frac{D(1) \times (1-X)^p - 1 \times D\left((1-X)^p\right)}{(1-X)^{2p}} \\ &= \frac{-\left(-p(1-X)^{p-1}\right)}{(1-X)^{2p}} \;=\; \frac{p}{(1-X)^{p+1}}. \blacksquare \end{aligned}$$

I.4.c. D'après (I.2.a) et la définition de la multiplication dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\frac{A(X)}{1-X} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} X^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) X^n.$$

I.4.d. Appliquons (I.4.c) avec $p \geq 2$ et

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^{p-1}} = \sum_{n\geq 0} a_{p-1,n} X^n.$$

On remarque que

$$\frac{A(X)}{1-X} = \frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n\geq 0} a_{p,n} X^n,$$

et l'on obtient :

$$a_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} a_{p-1,k}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \quad \binom{n+p-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-2}{k}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \binom{n+p}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k}.$$

Partie II - Séries génératrices et suites récurrentes

II.1.a.

$$\begin{aligned} A(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n &= a_0 + \sum_{n\geq 1} (2a_{n-1} + n - 1) X^n \\ &= 2\sum_{n\geq 1} a_{n-1} X^n + \sum_{n\geq 1} (n-1) X^n \quad (\text{car } a_0 = 0) \\ &= 2XA(X) + \sum_{n'\geq 0} n' X^{n'+1}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n'\geq 0} n' X^{n'+1} = X^2 \sum_{n'\geq 0} n' X^{n'-1} = X^2 \sum_{n\geq 0} (n+1) X^n$, on obtient :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n\geq 0} (n+1) X^n.$$

II.1.b. Pour déterminer les scalaires a, b, c tels que

$$\frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{a}{(1-X)^2} + \frac{b}{1-X} + \frac{c}{1-2X}, \quad (*)$$

multiplions les deux membres par $(1-X)^2$ et remplaçons X par 1. On obtient $a = -1$. Multiplions ensuite les deux membres de $(*)$ par $1-2X$ et remplaçons X par $1/2$. On obtient $c = 1$. Pour déterminer le dernier coefficient, je peux par exemple faire $X = 0$ dans $(*)$. Cela donne $0 = a + b + c$, d'où $b = 0$. En conclusion :

$$\frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{-1}{(1-X)^2} + \frac{1}{1-2X}.$$

II.1.c. La question (II.1.a) donne :

$$(1-2X)A(X) = X^2 \times \sum_{n\geq 0} (n+1) X^n.$$

En utilisant le résultat de (I.4.a) :

$$(1-2X)A(X) = X^2 \times \frac{1}{(1-X)^2}.$$

Par suite

$$A(X) = \frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{-1}{(1-X)^2} + \frac{1}{1-2X}$$

et il suffit d'appliquer (I.4.a) et (I.2.b) pour obtenir :

$$A(X) = -\sum_{n\geq 0}(n+1)X^n + \sum_{n\geq 0} 2^n X^n = \sum_{n\geq 0}(2^n - n - 1)X^n.$$

Ainsi $a_n = 2^n - n - 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

II.2.a.

$$\begin{aligned} F(X) &= F_0 + F_1 + \sum_{n\geq 2}(F_{n-1} + F_{n-2})X^n \\ &= X + \sum_{n\geq 2} F_{n-1}X^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2}X^n \\ &= X + X\sum_{n\geq 2} F_{n-1}X^{n-1} + X^2\sum_{n\geq 2} F_{n-2}X^{n-2} \\ &= X + XF(X) + X^2F(X) \end{aligned}$$

donc

$$F(X) = \frac{-X}{X^2 + X - 1} = \frac{-X}{(X-x_1)(X-x_2)}$$

avec $x_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On détermine les scalaires a et b tels que

$$F(X) = \frac{a}{X-x_1} + \frac{b}{X-x_2}$$

comme d'habitude, en multipliant les deux membres par $X - x_1$ et en faisant $X = x_1$, pour obtenir

$$a = \frac{x_1}{x_2 - x_1},$$

puis en multipliant les deux membres par $X - x_2$ et en faisant $X = x_2$, pour obtenir

$$b = \frac{-x_2}{x_2 - x_1}.$$

Comme $x_2 - x_1 = \sqrt{5}$, on trouve :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1}{X - x_1} - \frac{x_2}{X - x_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\dfrac{X}{x_1} - 1} - \frac{1}{\dfrac{X}{x_2} - 1}\right).$$

On a

$$\frac{1}{x_1} = \frac{-2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{-2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \alpha_2$$

et

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha_1,$$

donc

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha_1 X} - \frac{1}{1 - \alpha_2 X}\right).$$

Remarque : α_1 et α_2 sont les racines du trinôme $x^2 - x - 1$, et α_1 n'est autre que le célèbre nombre d'or que le moine mathématicien italien Luca Pacioli (v. 1445 - 1517) appela la "divine proportion" dans l'un de ses ouvrages[4].

II.2.b. Compte tenu de (I.2.b),

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n \geq 0} \alpha_1^n X^n - \sum_{n \geq 0} \alpha_2^n X^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) X^n$$

donc $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_1^n - \alpha_2^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3.a. L'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{U} & \to & \mathbb{C}^k \\ & (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, ..., u_{k-1}) \end{array}$$

est bien définie, et c'est une application linéaire car pour toutes suites (u_n) et (v_n) de $\mathcal{U}$, et pour tout complexe λ,

$$\begin{aligned} \phi((u_n) + \lambda(v_n)) &= \phi((u_n + \lambda v_n)) \\ &= (u_0 + \lambda v_0, u_1 + \lambda v_1, ..., u_{k-1} + \lambda v_{k-1}) \\ &= (u_0, u_1, ..., u_{k-1}) + \lambda(v_0, v_1, ..., v_{k-1}) \\ &= \phi((u_n)) + \lambda\phi((v_n)). \end{aligned}$$

[4] Luca Pacioli, De divina proportione, Venise, 1509.

Il ne reste plus qu'à démontrer que ϕ est bijective, autrement dit que pour tout k-uplet $(\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$ de $\mathbb{C}^k$, il existe une et une seule suite (u_n) telle que $\phi((u_n)) = (\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$.
On a $\phi((u_n)) = (\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$ si et seulement si

$$(C) \quad \begin{cases} \forall i \in \{0, ..., k-1\} & u_i = \alpha_i \\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, ..., k-1\} & u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}, \end{cases}$$

et la condition (C) définit par récurrence une et une seule suite (u_n) de $\mathbb{C}$, qui appartient à $\mathcal{U}$ par construction. L'application ϕ est donc linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{C}^k$: c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

II.3.b.

$$\begin{aligned} P(X) &= Q(X) \times S(X) \\ &= S(X) - a_1 X S(X) - ... - a_k X^k S(X). \end{aligned}$$

Par définition $S(X) = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$ et pour tout $i \in \{0, ..., k\}$,

$$a_i X^i S(X) = \sum_{n\geq 0} a_i u_n X^{n+i} = \sum_{n\geq i} a_i u_{n-i} X^n$$

donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{n\geq 0} u_n X^n - \sum_{i=1}^{k} \sum_{n\geq i} a_i u_{n-i} X^n \\ &= \sum_{n\geq 0} u_n X^n - \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\text{Min}(k,n)} a_i u_{n-i} \right) X^n. \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{n=0}^{k-1} u_n X^n - \sum_{n=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{n-i} \right) X^n + \sum_{n\geq k} \left(u_n - \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i} \right) X^n \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \left(u_n - \sum_{i=1}^{n} a_i u_{n-i} \right) X^n, \end{aligned}$$

donc $P(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1$.

II.3.c. Les z_i sont les racines complexes du polynôme

$$W(X) = X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} - ... - a_k = X^k Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

et $W(X) = (X - z_1)^{\alpha_1} ... (X - z_p)^{\alpha_p}$, donc

$$\begin{aligned} X^k Q\left(\frac{1}{X}\right) &= (X - z_1)^{\alpha_1} ... (X - z_p)^{\alpha_p} \\ Q\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{X^k} (X - z_1)^{\alpha_1} ... (X - z_p)^{\alpha_p} \\ Q(Z) &= Z^k \left(\frac{1}{Z} - z_1\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{1}{Z} - z_p\right)^{\alpha_p} \\ Q(Z) &= (1 - z_1 Z)^{\alpha_1} ... (1 - z_p Z)^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

Comme aucune des racines z_i est nulle (car $W(0) = -a_k \neq 0$),

$$Q(Z) = (-1)^k \left(z_1^{\alpha_1} ... z_p^{\alpha_p}\right) \left(Z - \frac{1}{z_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(Z - \frac{1}{z_p}\right)^{\alpha_p}$$

et Q est un polynôme dont les racines sont $1/z_1$, ..., $1/z_p$, avec les ordres de multiplicité respectifs α_1, ..., α_p. Comme $\deg P < \deg Q = k$, le Théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples montre l'existence de nombres complexes $b_{i,j}$ tels que

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right).$$

II.3.d. D'après (II.3.b) et (II.3.c) :

$$S(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\alpha_i} (-1)^j b_{i,j} z_i^j \frac{1}{(1 - z_i X)^j}. \quad (*)$$

D'après (I.4.b) :

$$A_p(X) = \frac{1}{(1 - X)^p} = \sum_{n \geq 0} a_{p,n} X^n \quad \text{où } a_{p,n} = \binom{n + p - 1}{n}$$

donc par substitution :

$$\frac{1}{(1 - z_i X)^j} = \sum_{n \geq 0} a_{j,n} z_i^n X^n.$$

En remplaçant dans $(*)$:

$$\begin{aligned} S(X) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\alpha_i}(-1)^j b_{i,j} z_i^j \left(\sum_{n\geq 0} a_{j,n} z_i^n X^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\alpha_i}(-1)^j b_{i,j} z_i^j a_{j,n} z_i^n\right) X^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n\right) X^n \end{aligned}$$

où

$$R_i(n) = \sum_{j=1}^{\alpha_i}(-1)^j b_{i,j} z_i^j a_{j,n}$$

est une combinaison linéaire des $a_{j,n}$. Comme

$$\begin{aligned} a_{j,n} = \binom{n+j-1}{n} &= \binom{n+j-1}{j-1} \\ &= \frac{(n+j-1)(n+j-2)...(n+1)}{(j-1)!} \end{aligned}$$

et comme le numérateur de $a_{j,n}$ est un produit de $j-1$ polynômes du premier degré en n, $a_{j,n}$ sera un polynôme en n de degré $j-1$, et $R_i(n)$ sera un polynôme en n de degré inférieur à $\deg a_{\alpha_i,n} = \alpha_i - 1$. Ainsi $\deg R_i(n) < \alpha_i$. En conclusion

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n$$

où les R_i sont bien des polynômes de degrés $< \alpha_i$.

II.3.e. • Si (v_n) et (w_n) appartiennent à $\mathcal{V}$, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$ il existe des polynômes P_i et Q_i de degrés $< \alpha_i$ tels que $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) z_i^n$ et $w_n = \sum_{i=1}^{p} Q_i(n) z_i^n$ quel que soit n. Alors

$$v_n + \lambda w_n = \sum_{i=1}^{p} (P_i(n) + \lambda Q_i(n)) z_i^n$$

où $n \mapsto P_i(n) + \lambda Q_i(n)$ est une fonction polynomiale de degré $< \alpha_i$, quel que soit i. Cela montre que $(v_n) + \lambda(w_n)$ est encore une suite de $\mathcal{V}$, et donc que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

• Tout élément (v_n) de $\mathcal{V}$ est tel que $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) z_i^n$ pour tout n, et apparaît donc comme une combinaison linéaire des suites $(n^t z_i^n)$ où $1 \leq i \leq p$

et $0 \leq t \leq \alpha_i - 1$. Le système $\mathcal{F} = \{(n^t z_i^n)\}_{1 \leq i \leq p\,;\, 0 \leq t \leq \alpha_i - 1}$ est donc une famille génératrice finie de $\mathcal{V}$. Par suite $\mathcal{V}$ est un sous-espace de dimension finie et

$$\dim \mathcal{V} \leq \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = k.$$

La question (II.3.d) montre que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, donc $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{V} \leq k$. Mais (II.3.a) donne $\dim \mathcal{U} = k$. Par conséquent $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = k$, et l'inclusion $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ sera une égalité. Ainsi $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Remarque : On vient de prouver que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{U}$, et donc de déterminer toutes les suites récurrentes satisfaisant la relation $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}$. Ces suites sont les combinaisons linéaires des suites $(n^t z_i^n)$ où $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq t \leq \alpha_i - 1$, les z_i et les α_i $(1 \leq i \leq p)$ étant les racines du polynôme $W(X) = X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} - ... - a_k$ et les multiplicités de ces racines.

Partie III - Nombre de partitions d'un ensemble

III.1. Si A est une partie de $S = \{1, 2, 3, 4\}$, je note $\mathcal{P}_A$ la partition $\{A, S \backslash A\}$ de S en 2 classes. On obtient 7 partitions de S en 2 classes, les partitions $\mathcal{P}_A$ où A est l'une des parties suivantes : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ ou $\{1, 4\}$.

III.2. Soit S un ensemble de cardinal n, et s un élément de S. Notons :
- $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des partitions de S en k classes.
- $\mathcal{O}$ l'ensemble des partitions de S en k classes qui contiennent $\{s\}$,
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des partitions de S en k classes qui ne contiennent pas $\{s\}$.

Clairement

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{O} \,\dot{\cup}\, \mathcal{N}$$

où $\dot{\cup}$ désigne une réunion disjointe. Si $|X|$ désigne le cardinal d'un ensemble X, on a donc

$$|\mathcal{P}_k| = |\mathcal{O}| + |\mathcal{N}|$$

où $|\mathcal{P}_k| = \left\{ {n \atop k} \right\}$.
Il y a autant de partition de S à k classes qui contiennent $\{s\}$ que de partitions de $S \backslash \{s\}$ à $k - 1$ classes, donc

$$|\mathcal{O}| = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

Pour obtenir une partition de S en k classes qui ne contiennent pas $\{s\}$, il suffit de choisir une partition de $S \backslash \{s\}$ en k classes S_1, ..., S_k, puis d'adjoindre

l'élément s à l'une de ces parties S_i, au choix (FIG. 5.1). Pour chaque partition de $S\setminus\{s\}$ en k classes on obtient ainsi k partitions différentes de S en k classes qui ne contiennent pas $\{s\}$, donc

$$|\mathcal{N}| = k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}.$$

Finalement :

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}.$$

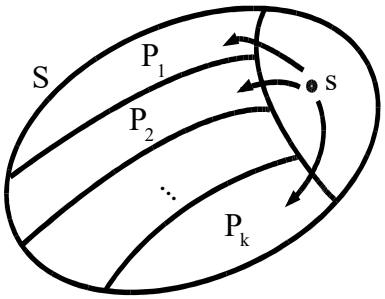


FIG. 5.1 – Un dessin permet de comprendre le calcul de $|\mathcal{N}|$.

Remarque : Les explications données pour le calcul de $|\mathcal{N}|$ me semblent suffisantes. Si l'on veut aller plus loin et formaliser un peu plus la preuve, il faut utiliser le lemme du berger (§ 5.3.2). Donnons une rédaction possible :
A chaque partition P de S en k classes qui ne contient pas $\{s\}$ on peut associer la partition $\psi(P)$ de $S\setminus\{s\}$ induite par P (i.e. formée des parties qui sont des intersections d'éléments de P avec $S\setminus\{s\}$).
On obtient ainsi une surjection

$$\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}_k(S\setminus\{s\})$$

où $\mathcal{P}_k(S\setminus\{s\})$ désigne l'ensemble des partitions de $S\setminus\{s\}$ en k classes.
Pour tout $P' \in \mathcal{P}_k(S\setminus\{s\})$, $\psi^{-1}(\{P'\})$ est un ensemble de cardinal k (l'élément s pouvant appartenir à l'une quelconque des k parties de P où $P \in \mathcal{N}$ vérifie $\psi(P) = P'$), et le lemme du berger s'applique :

$$|\mathcal{N}| = k \times |\mathcal{P}_k(S\setminus\{s\})| = k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}.$$

III.3.a. Comme $0 < k$ donc $\left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$ par définition du symbole $\left\{ {n \atop k} \right\}$, donc :

$$A_k(X) = \sum_{n \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} X^n = \sum_{n \geq 1} \left\{ {n \atop k} \right\} X^n.$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} A_k(X) &= \sum_{n \geq 1} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} X^n + k \sum_{n \geq 1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} X^n \\ &= X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X). \end{aligned}$$

III.3.b. La question précédente donne

$$\begin{aligned} A_k(X) &= \frac{X}{1-kX} A_{k-1}(X) \\ &= \frac{X}{1-kX} \times \frac{X}{1-(k-1)X} A_{k-2}(X) \\ &= ... \\ &= \frac{X}{1-kX} \times \frac{X}{1-(k-1)X} \times ... \times \frac{X}{1-X} A_0(X) \\ &= \frac{X^k}{\prod_{m=1}^{k} (1-mX)} A_0(X) \end{aligned}$$

où $A_0(X) = \sum_{n \geq 0} \left\{ {n \atop 0} \right\} X^n = \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Donc

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\prod_{m=1}^{k} (1-mX)}.$$

III.3.c. Le Théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples montre l'existence de complexes α_r tels que

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{k} (1-mX)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{1-rX}.$$

Si $t \in \{1, ..., k\}$ est fixé, il suffit de faire $X = 1/t$ dans

$$\frac{1-tX}{\prod_{m=1}^{k} (1-mX)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r (1-tX)}{1-rX}$$

pour obtenir

$$\frac{1}{\prod_{1\leq m\leq k \text{ et } m\neq t}(1-m/t)} = \alpha_t$$

d'où

$$\alpha_t = \frac{t^{k-1}}{\prod_{1\leq m\leq k \text{ et } m\neq t}(t-m)}.$$

Par suite

$$\alpha_r = \frac{r^{k-1}}{\prod_{1\leq m\leq k \text{ et } m\neq r}(r-m)} = \frac{r^{k-1}}{[(r-1)(r-2)...1][(-1).(-2)...(r-k)]}$$
$$= \frac{(-1)^{k-r} r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}.$$

III.3.d. Ce qui précède et (I.2.b) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} A_k(X) &= X^k \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{1-rX} \\ &= X^k \sum_{r=1}^{k} \alpha_r \left(\sum_{n\geq 0} r^n X^n \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{r=1}^{k} \alpha_r r^n X^{n+k} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$A_k(X) = \sum_{n'\geq k} \sum_{r=1}^{k} \alpha_r r^{n'-k} X^{n'}.$$

Comme

$$\alpha_r r^{n-k} = \frac{(-1)^{k-r} r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!} r^{n-k} = \frac{(-1)^{k-r} r^n}{r!(k-r)!},$$

on obtient

$$A_k(X) = \sum_{n\geq k} \left(\sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!} \right) X^n.$$

Cela prouve que

$$\forall n \geq k \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}.$$

III.4.a. On a $S(n,p) = 0$ car il n'existe pas de surjection[5] d'un ensemble fini vers un ensemble de cardinal strictement supérieur au cardinal de l'ensemble de départ. On sait en effet que si $f : E \to F$ est une surjection entre deux ensembles finis, alors $|E| \geq |F|$ (§ 5.3.3, Lemme 1).

III.4.b. Une application surjective entre deux ensembles finis de même cardinal n est une bijection (§ 5.3.3, Lemme 3), et il y aura autant de bijection de E sur F que de permutation des éléments de F, soit $n!$. Donc $S(n,n) = n!$.

III.4.c. Posons $F = \{y_1, ..., y_p\}$, et appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des surjections de E sur F.
A chaque élément f de $\mathcal{S}$ on peut associer la partition $P_f = \{f^{-1}(\{y_i\})\}_{1 \leq i \leq p}$ de E en p classes. On définit ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S} & \to & \mathcal{P}_p \\ & f & \mapsto & P_f \end{array}$$

de $\mathcal{S}$ vers l'ensemble $\mathcal{P}_p$ des partitions de E en p classes.
Ψ est surjective puisque si $P \in \mathcal{P}_p$, il est facile de définir une surjection f de E sur F telle que $P = P_f$. Avoir $P = P_f$ revient à dire que f envoie tous les éléments d'une partie appartenant à P sur le même élément y de F. Plus précisément, si $P = \{P_1, ..., P_p\} \in \mathcal{P}_p$, alors $P_f = P$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,...,p\} \quad \exists j_i \in \{1,...,p\} \quad \forall x \in P_i \quad f(x) = y_{j_i} \\ \forall i, i' \in \{1,...,p\} \qquad i \neq i' \;\Rightarrow\; y_{j_i} \neq y_{j_{i'}}. \end{cases}$$

Il y aura donc autant d'éléments f tels que $P_f = P$ que de bijections $i \mapsto j_i$ de $\{1,...,p\}$ sur $\{1,...,p\}$, c'est-à-dire $p!$ ([6]). Ainsi

$$\forall P \in \mathcal{P}_p \quad \left|\Psi^{-1}(P)\right| = p!$$

et le lemme du berger (§ 5.3.2) permet de conclure :

$$|\mathcal{S}| = p! \times |\mathcal{P}_p| = p! \left\{ {n \atop p} \right\}.$$

[5] Les surjections auxquelles on s'intéresse ici sont supposées être des applications. Ce n'est pas nécessaire dans les questions I.4.a et I.4.b, mais cela le devient dans la question I.4.c où l'on utilisera le lemme du berger et donc une partition de E formée des parties $f^{-1}(\{y\})$ où y décrit F.

[6] C'est le nombre de permutations d'un ensemble à p éléments.

Partie IV - Nombre de dérangements

IV.1. $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ car seule la transposition $(1,2)$ convient, et enfin $d_3 = 2$ car sur les 6 éléments de $\mathfrak{S}_3$, seuls les cycles $(1,2,3)$ et $(1,3,2)$ sont des dérangements.

IV.2.a. Pour obtenir un élément de B_k, il faut :

a) Choisir les k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, ..., n\}$ qui seront invariant par permutation, ce qui fait autant de choix possibles que de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, soit $\binom{n}{k}$. Ces éléments forment une partie P de $\mathbb{N}_n$.

b) Choisir une permutation sans point fixe (autrement dit un dérangement) de $\mathbb{N}_n \backslash P$. Il existe d_{n-k} tels dérangements.

Par conséquent :

$$|B_k| = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Comme $\mathfrak{S}_n$ est la réunion disjointe des B_k quand $k \in \{0, ..., n\}$, on aura :

$$n! = |\mathfrak{S}_n| = \sum_{k=0}^{n} |B_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

IV.2.b. $E(X) \times P(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = 1$$

(en utilisant la question précédente), donc $E(X) \times P(X) = \sum_{n\geq 0} X^n$.

IV.2.c. Posons [7] :

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} X^n.$$

[7] On pose cela par intuition, car on pense à l'exponentielle réelle qui s'écrit $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, et à $e^{-x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ qui vérifie $e^x \times e^{-x} = 1$. C'est ce qu'il nous faudrait ici.

Alors

$$\begin{aligned} E(X) \times F(X) &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right) X^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \right) X^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} (1-1)^n X^n \ = \ 1 \end{aligned}$$

donc $F(X)$ est l'inverse de $E(X)$.

IV.2.d. De $E(X) \times P(X) = \sum_{n\geq 0} X^n$ on déduit :

$$P(X) = F(X) \times \sum_{n\geq 0} X^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) X^n$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie V - Nombres de Catalan

V.1.a. *Première solution* : Pour que s_k soit d'ordonnée nulle, il faut que le chemin $\mathcal{C}$ "monte" autant de fois qu'il "descend" entre s_0 et s_k. S'il y a t montées et t descentes, on obtient $k = 0 + t + t = 2t$, donc k est pair.

Deuxième solution : Soit t_i la i-ème translation définie par $t_i(s_{i-1}) = s_i$. On a $t_i : (x, y) \longmapsto (x + 1, y + \varepsilon_i)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, donc :

$$s_k = t_k \circ ... \circ t_1 (s_0) = (k, \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k).$$

s_k sera d'ordonnée nulle si et seulement si $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k = 0$, ce qui nécessite que k soit pair (il faut qu'il y ait autant de 1 que de -1 dans la somme $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$).

Troisième solution : Comme $s_{k(\mathcal{C})}$ est d'ordonnée nulle, il existe deux entiers naturels p, q tels que

$$k(\mathcal{C})\overrightarrow{i} = p(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + q(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}),$$

donc

$$\begin{cases} p+q = k(\mathcal{C}) \\ p-q = 0. \end{cases}$$

Par suite $k(\mathcal{C}) = 2p$ et $k(\mathcal{C})$ est pair.

V.1.b. Si $k(\mathcal{C}) = 2n$, nécessairement $s_1 = (1,1)$, $s_{2n-1} = (2n-1,1)$, et l'ordonnée de s_i est strictement positive quel que soit $i \in \{1,...,2n-1\}$. Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ reliant s_0 à s_{2n} et tels que $k(\mathcal{C}) = 2n$ sera donc égal au nombre de chemins de Dyck de longueur $2(n-1)$ reliant s_1 à s_{2n-1}, c'est-à-dire c_{n-1}.

V.1.c. Notons $\mathcal{D}'_{2p}$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$ tels que $k(\mathcal{C}) = 2p$. Supposons ici que $1 \leq p \leq n-1$.

Un chemin de $\mathcal{D}'_{2p}$ est obtenu en assemblant deux chemins de Dyck de longueurs plus petites :

- le premier allant de s_0 à s_{2p} où s_{2p} est d'ordonnée nulle, et n'ayant aucun sommet sur l'axe des x mis à part s_0 et s_{2p}. Le nombre de ces chemins à été calculé à la question précédente : il en existe c_{p-1}.

- le second reliant s_{2p} à s_{2n} sans aucune contrainte, donc définissant un chemin de Dyck quelconque entre s_{2p} à s_{2n}. Par définition, il existe c_{n-p} tels chemins.

Finalement, on dénombre $c_{p-1} \times c_{n-p}$ chemins de Dyck possibles reliant s_0 à s_{2n} et vérifiant $k(\mathcal{C}) = 2p$. On a donc :

$$\left|\mathcal{D}'_{2p}\right| = c_{p-1}c_{n-p}.$$

V.1.d. D'après (V.1.b), $|\mathcal{D}'_{2n}| = c_{n-1}$, donc comme l'on pose judicieusement $c_0 = 1$, $|\mathcal{D}'_{2n}| = c_{n-1}c_{n-n}$ et la formule de la question (V.1.c) reste valide quand $p = n$. Notons $\mathcal{D}_{2n}$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$. L'ensemble $\mathcal{D}_{2n}$ est la réunion disjointe des ensembles $\mathcal{D}'_{2p}$ quand $1 \leq p \leq n$, donc

$$c_n = |\mathcal{D}_{2n}| = \sum_{j=1}^{n} \left|\mathcal{D}'_{2j}\right| = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1}c_{n-j}.$$

V.2.a.

$$S(X) = 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{1/2}{n} (-4)^n X^n = 1 + \sum_{n\geq 0} \xi_n X^{n+1}$$

où

$$\begin{aligned}\xi_n &= \binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n\right)(-4)^{n+1}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)(-3)...(-(2n-1))}{2^{n+1}}(-4)^{n+1}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^n\left[(2n-1)(2n-3)...\times 3\times 1\right]}{2^{n+1}}(-1)^{n+1}2^{2n+2}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{-1}{(n+1)!}\frac{(2n)!}{\left[(2n)(2n-2)...\times 2\right]}2^{n+1}\\ &= \frac{-1}{(n+1)!}\frac{(2n)!}{2^n n!}2^{n+1}\\ &= \frac{-2}{(n+1)}\frac{(2n)!}{n!\times n!} \;=\; \frac{-2}{(n+1)}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Par suite : $S(X) = 1 - \sum_{n\geq 0}\frac{2}{(n+1)}\binom{2n}{n}X^{n+1}$.

V.2.b. En simplifiant un peu les notations, on obtient :

$$\begin{aligned}H = X + H^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-S) = X + \frac{1}{4}(1-S)^2\\ &\Leftrightarrow 2 - 2S = 4X + 1 + S^2 - 2S\\ &\Leftrightarrow S^2 = 1 - 4X\end{aligned}$$

et cette dernière affirmation est vraie, donc $H(X) = X + H(X)^2$.

V.3.a. Comme on travaille dans un anneau intègre,

$$\begin{aligned}X\times C(X) = X + (X\times C(X))^2 &\Leftrightarrow C(X) = 1 + X\times C(X)^2\\ &\Leftrightarrow X\times C(X)^2 = C(X) - 1 \quad (*)\end{aligned}$$

et tout revient à calculer $X\times C(X)^2$. On a :

$$C(X)^2 = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right)X^n$$

donc

$$X \times C(X)^2 = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) X^{n+1}$$
$$= \sum_{n'\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{n'-1} c_k c_{n'-1-k}\right) X^{n'}.$$

D'après (V.I.d),

$$\sum_{k=0}^{n'-1} c_k c_{n'-1-k} = \sum_{k'=1}^{n'} c_{k'-1} c_{n'-k'} = c_{n'}$$

donc

$$X \times C(X)^2 = \sum_{n\geq 1} c_n X^n = C(X) - 1.$$

Finalement l'égalité $(*)$ est vraie, et les équivalences écrites plus haut montrent que $X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$.

V.3.b. • En soustrayant membre à membre les égalités des questions (V.2.b) et (V.3.a), on obtient (en simplifiant les écritures) :

$$H - XC = H^2 - XC^2$$

d'où

$$(H - XC)(1 - (H + XC)) = 0$$

et puisque nous sommes dans un anneau intègre :

$$\begin{cases} XC = H \\ \text{ou} \\ H + XC = 1. \end{cases}$$

On a $s_0 = 1$, donc $S(0) = 1$ et $H(0) = 0$. Si l'on avait $H + XC = 1$, on aurait $H(0) = 1$, ce qui est absurde. Donc $H + XC \neq 1$ et $XC = H$. Alors :

$$C(X) = \frac{1}{X}H(X) = \frac{1}{X}.\frac{1}{2}(1 - S(X))$$
$$= \frac{1}{X}.\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{2}{(n+1)}\binom{2n}{n}X^{n+1}\right) \text{ (d'après V.2.a)}$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}X^n$$

donc $c_n = \dfrac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$.

- Et voici la dernière vérification à faire :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{n+1}{n!} - \frac{n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \;=\; \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \;=\; c_n.\end{aligned}$$

Remarque : Une autre méthode de calcul du nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ est proposée à la Section 5.3.4.

5.3 Compléments

5.3.1 Identification d'une suite à une série formelle

On gagne beaucoup à identifier l'algèbre $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'algèbre des séries formelles $\mathbb{K}[[X]]$. Une suite $a = (a_n)$ est identifiée à une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, et toutes nos habitudes de calculs persistent avec ces sommes infinies formelles.
Faisons bien attention : il est hors de propos de faire ici de analyse ou de la topologie en parlant d'une quelconque convergence. Les séries $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ n'ont absolument rien à voir avec des séries numériques ou des limites de séries convergentes.
Tour ce que l'on fait, c'est donner une notation (qui utilise bien sûr une infinité d'éléments de $\mathbb{K}$) pour représenter un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il s'agit uniquement d'obtenir une écriture commode qui permette de calculer des produits plus facilement en utilisant ce que l'on a toujours fait avec des polynômes. La notation $X = (0, 1, 0, 0, ...)$ est un coup de génie, et définir $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X^2$, etc est primordial. Ce faisant, on troque une suite pour une *série formelle* d'indéterminée X.

Dans la note en bas de la page 181, nous avons annoncé deux propriétés :

$$\begin{cases} \lambda.\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n X^n & (P1) \\ X \times \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n X^{n+1} & (P2) \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter l'expression d'une somme :

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_{nn}) X^n \quad (P3)$$

La propriété $(P1)$ est évidente, car si l'on note $a = (a_n) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, alors

$$\lambda . \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right) = \lambda . a = (\lambda a_n) = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n X^{n+1}.$$

De même, la propriété $(P3)$ est triviale. Pour démontrer $(P2)$, posons $X = b$ où $b = (b_n)$ est définie en posant $b_n = \delta_{n,1}$ quel que soit n, le symbole $\delta_{n,1}$ désignant le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $n = 1$ et 0 ailleurs. Alors :

$$X \times \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right) = b \times a$$

avec

$$[b \times a]_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k,1} a_{n-k} = a_{n-1}$$

si $n > 0$, et $[b \times a]_0 = b_0 a_0 = 0$ sinon. On obtient donc :

$$b \times a = 0 \times X^0 + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} X^n = 0 + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} X^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} X^n,$$

ce qui donne aussi un sens à l'écriture $\sum_{n\geq 1} a_{n-1} X^n$, que l'on s'autorisera vite à écrire $\sum_{n\geq 0} a_n X^{n+1}$. Evidemment, la formule $(P2)$ se généralise ainsi :

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right) \times \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

et l'on s'autorisera à écrire $\sum_{n\geq k} a_n X^n$ à la place de $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ lorsque $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0$. Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles.

5.3.2 Principe du berger

C'est un des principes fondamentaux de dénombrement que l'on expose dans la première leçon d'oral du volume [4], à la Section 1.1.2.
Un berger compte ses chèvres 5 par 5. Il fait des paquets de 5, puis multiplie le nombre de paquets obtenu par 5 pour obtenir le nombre de chèvres.

Voyons les choses de façon légèrement différente, et considérons une application surjective $f : E \to F$ d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F. Supposons qu'il existe un entier p non nul tel que $\left|f^{-1}(\{y\})\right| = p$ pour tout $y \in F$ (où les deux barres désignent le cardinal d'un ensemble). Le principe du berger montre alors que :

$$|E| = p \times |F| .$$

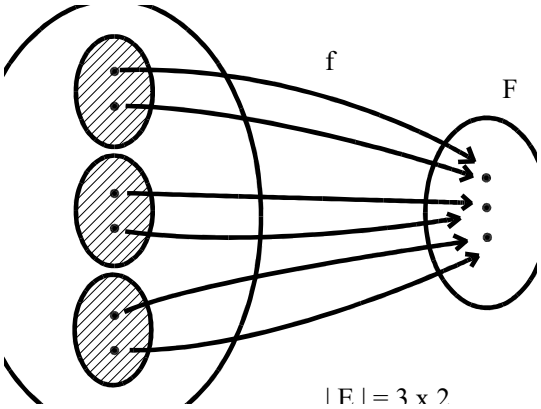


FIG. 5.2 – Principe du berger

La preuve est facile à imaginer si l'on dessine la FIG. 5.2. E apparaît comme la réunion disjointe des parties $f^{-1}(\{y\})$ lorsque y décrit l'ensemble d'arrivée F, et le principe de la somme[8] donne :

$$E = \dot{\bigcup_{y \in F}} f^{-1}(\{y\})$$

d'où

$$|E| = \sum_{y \in F} \left|f^{-1}(\{y\})\right| = p \times |F| .$$

5.3.3 Trois lemmes sur les cardinaux

A la question (III.4.a), on a utilisé le résultat suivant :

[8] Comme on l'a déjà fait remarquer à l'occasion de l'étude d'une leçon d'oral des concours en [4], toutes les méthodes de dénombrement connues proviennent d'un seul principe : celui de la somme. C'est important à savoir pour un oral. Il est aussi important de savoir que le mot "principe" peut choquer des oreilles de mathématiciens, car s'adresse à des lois de la physique, et que les mathématiques ne sont pas issues des sciences expérimentales comme le sont les sciences physiques. C'est pour cela que l'on préfère souvent parler du "lemme du berger", et non du "principe du berger".

Lemme 1 : Si $f : E \to F$ est une surjection entre deux ensembles finis, alors $|E| \geq |F|$.

Preuve : Si $f : E \to F$ est surjective, pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Pour tout y, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide. L'axiome du choix me dit l'existence d'une application $g : F \to E$ telle que $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in F$.
Dans ce cas $f(g(y)) = y$ pour tout y, et $f \circ g = Id_F$. Comme Id_F est injective, g le sera aussi, et $g : F \to E$ sera une injection de F dans E. Le Lemme 2 montre alors que $|F| \leq |E|$. ■

Lemme 2 : Si $f : E \to F$ est une application injective entre deux ensembles finis, alors $|E| \leq |F|$.

Preuve : f induit une bijection de E sur son image $f(E)$, donc E et $f(E)$ ont même cardinal. Comme $f(E)$ est inclus dans F, on aura $|f(E)| \leq |F|$, et finalement $|E| = |f(E)| \leq |F|$.

A la question (III.4.b), on a utilisé :

Lemme 3 : Une application surjective entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection.

Preuve : Si $f : E \to F$ est une surjection de E sur F, et si $|E| = |F|$, il s'agit de montrer que f est bijective.

Première méthode : Comme f est surjective,

$$E = \dot{\bigcup_{y \in F}} f^{-1}(\{y\}) \quad \text{et} \quad \left(\forall y \in F \quad \left|f^{-1}(\{y\})\right| \geq 1\right).$$

Donc $|E| = \sum_{y \in F} \left|f^{-1}(\{y\})\right|$. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas bijective. Dans ce cas il existe $y_0 \in F$ tel que $\left|f^{-1}(\{y_0\})\right| \geq 2$, et

$$|E| = \left|f^{-1}(\{y_0\})\right| + \sum_{y \in F \setminus \{y_0\}} \left|f^{-1}(\{y\})\right| \geq 2 + (|F| - 1)$$

c'est-à-dire $|E| \geq |F| + 1$, ce qui est absurde puisque $|E| = |F|$.

Seconde méthode : Pour tout $y \in F$, la partie $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide. L'axiome du choix montre l'existence d'une application $g : F \to E$ telle que $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in F$. Par définition de g, on a $f \circ g = Id_F$, de telle sorte que g soit injective entre deux ensemble de même cardinal ! C'est forcément une bijection (voir Lemme 4), et $f = g^{-1}$ en sera aussi une ! ■

Lemme 3 : Une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection.

Preuve : Si l'application $f : E \to F$ est injective entre deux ensembles finis de même cardinal, alors f induit une bijection de E sur son image $f(E)$. Par conséquent $|f(E)| = |E| = |F|$.
$f(E)$ est inclus dans F et de même cardinal que F, donc $f(E) = F$ et f est surjective. Finalement $f : E \to F$ est à la fois surjective et injective : c'est une bijection. ■

5.3.4 Chemins de Dyck et parenthésage

La partie V de la composition 2 du problème du CAPES externe 2010 proposait le calcul du nombre c_n de chemins de Dyck de longueur $2n$ en utilisant la machinerie des séries formelles.
Dans ce problème, un chemin de Dyck était défini comme une suite $(s_0, ..., s_{2n})$ de $2n+1$ points du plan à *coordonnées entières positives* tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$, et tels que pour tout $k \in \{0, 1, ..., 2n-1\}$, s_{k+1} soit l'image de s_k par une translation de vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ou $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

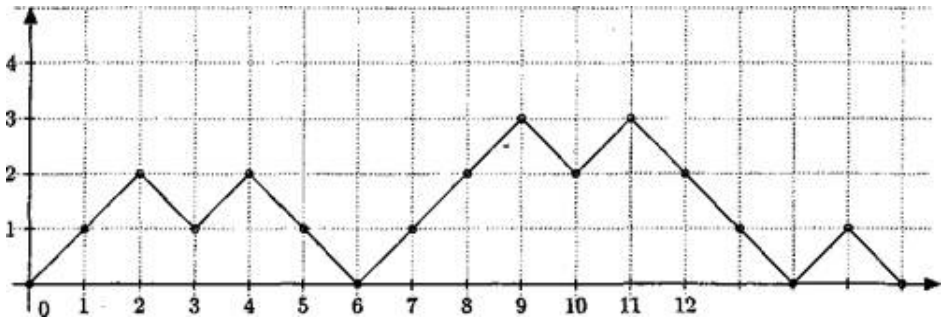


FIG. 5.3 – Exemple de chemin de Dyck

Le chemin de Dyck γ dessiné dans la FIG. 5.3 est ainsi formé de segments "montants" ou "descendants", et ne traverse pas l'axe des x. Il est naturel de vouloir le coder en choisissant d'écrire "1" pour signaler un segment "montant", et "0" pour signaler un segment "descendant". On obtient alors :

$$\gamma = 1101001110100010.$$

Un chemin de Dyck est ainsi un mot $a_1a_2...a_{2n}$ de longueur $2n$ où les a_i sont des 0 ou des 1, où l'on dénombre autant de 0 que de 1, et où pour tout

$k \in \{1, ..., 2n\}$ il existe toujours plus de 1 que de 0 parmi les k premiers symboles a_1, ..., a_k.

Tout se passe comme si on voulait écrire un mot de longueur $2n$ avec deux symboles, des parenthèses ouvrantes "(" ou fermantes ")", de façon à ce qu'à n'importe quel moment de l'écriture de ce mot de gauche à droite, il y ait plus de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes, et bien entendu autant de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes une fois que le mot est écrit.

Vus de cette façon, les chemins de Dyck sont des mots de longueur $2n$ formés avec des parenthèses correctement assemblées.

Avec ce codage, le mot γ de la FIG. 5.3 s'écrit :

$$\gamma = (()())((()()))().$$

Il y a $\binom{2n}{n}$ façons d'écrire un mot de longueur $2n$ en utilisant n symboles "(" et n symboles ")", soit autant de fois qu'il y a de parties de cardinal n dans un ensemble de cardinal $2n$. Mais combien existe-t-il de chemins de Dyck ?

Le nombre c_n de chemins de Dyck de longueur $2n$, appelé "nombre de Catalan", a été calculé dans le problème de CAPES :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

On peut le retrouver de façon assez agréable en procédant comme suit[9].

Appelons :

- $\mathcal{S}$ l'ensemble des mots de la forme $\gamma = a_1...a_{2n}$, avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout i, et comportant autant de symboles "1" que de symboles "0".

- $\mathcal{D}$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$, c'est-à-dire l'ensemble des mots $\gamma = a_1...a_{2n}$ de $\mathcal{S}$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., 2n\}$ il existe toujours plus de 1 que de 0 dans $\{a_1, ..., a_k\}$.

- $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{S} \backslash \mathcal{D}$ l'ensemble des mots de $\mathcal{S}$ qui ne sont pas des chemins de Dyck.

On connaît déjà le cardinal de $\mathcal{S}$:

$$|\mathcal{S}| = \binom{2n}{n},$$

et il s'agit de calculer le cardinal de $\overline{\mathcal{D}}$.

Un mot $\gamma = a_1 ... a_{2n}$ de $\overline{\mathcal{D}}$ est tel qu'il existe $k \in \{1, ..., 2n\}$ tel qu'il y ait plus de 0 que de 1 dans la partie $\{a_1, ..., a_k\}$. Choisissons le plus petit entier k

[9] Méthode citée dans [7] et attribuée à André.

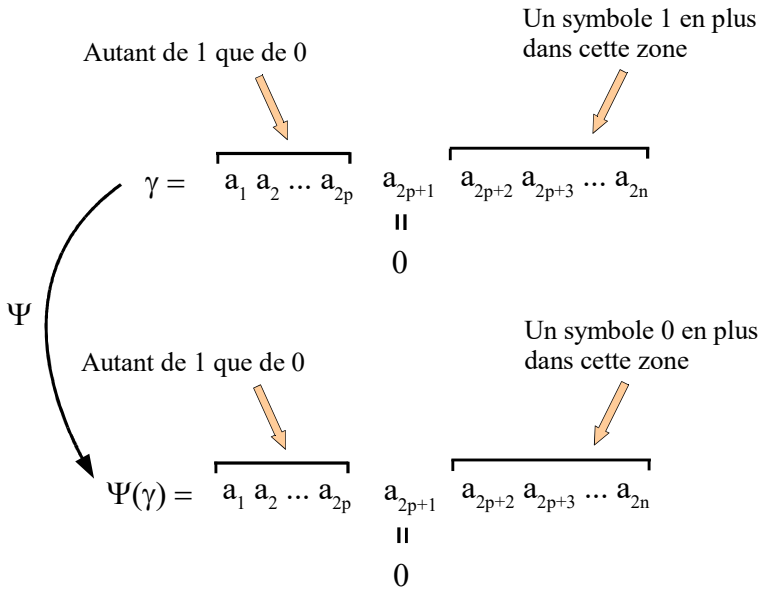


FIG. 5.4 – Visualisation de l'application Ψ

qui vérifie cela. k est nécessairement impair, aussi posons $k = 2p + 1$. Dans $\{a_1, ..., a_k\}$, il y a p symboles "1" et $p + 1$ symboles "0", et bien sûr $a_k = 0$ (voir FIG. 5.4).
L'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \overline{\mathcal{D}} & \to & \mathcal{W} \\ & \gamma = a_1 \dots a_{2n} & \mapsto & \gamma = a'_1 \dots a'_{2n} \end{array}$$

qui à $\gamma = a_1 \dots a_{2n}$ associe $\gamma = a'_1 \dots a'_{2n}$ tel que

$$\begin{cases} \forall i \leq k = 2p + 1 & a'_i = a_i \\ \forall i > k & a'_i = \overline{a}_i \end{cases}$$

où l'on pose $\overline{1} = 0$ et $\overline{0} = 1$, est une bijection de $\overline{\mathcal{D}}$ dans l'ensemble $\mathcal{W}$ formé par les mots $a_1 \dots a_{2n}$ qui comportent $n - 1$ symboles "1" et $n + 1$ symboles "0", ceux-ci étant placés n'importe où !
Ψ est une application involutive de l'ensemble des suites $\Omega = \{0, 1\}^{2n}$ dans lui-même (il est facile de voir que $\Psi \circ \Psi(\gamma) = \gamma$ quel que soit $\gamma \in \Omega$), et on peut vérifier que $\Psi(\overline{\mathcal{D}}) = \mathcal{W}$. La FIG. 5.4 permet d'imaginer comment Ψ transforme les mots.
Finalement $\left|\overline{\mathcal{D}}\right| = |\mathcal{W}|$, et comme il existe $\binom{2n}{n-1}$ façons de choisir $n - 1$ places

dans un mot de $2n$ lettres pour y écrire des "1", on obtient :

$$\left|\overline{\mathcal{D}}\right| = |\mathcal{W}| = \binom{2n}{n-1} \quad \text{et} \quad |\mathcal{D}| = |\mathcal{S}| - \left|\overline{\mathcal{D}}\right| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Chapitre 6

CAPES externe 2011, épreuve 2

6.1 Énoncé

n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal. La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

o $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

o $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

o $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

o Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.

o Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, ..., n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq k}}$ appartenant à $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

o $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.

o On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout
$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

o On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0_{n,1}\}$, ${}^tXMX > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

o On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$) est un ellipsoïde, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, {}^tXAX \leq 1\}.$$

Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, {}^tXAX \leq 1\}$ sera noté $\mathcal{E}_A$.

Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$. Cette partie a pour objet de démontrer l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral.
Le terme ellipse désigne une courbe bornée admettant dans un repère une équation du type

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1. Etant donné un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points :

$$I\,(1, 0)\,, \quad J\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(a) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et d'équation

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Montrer que $d = e = 0$.

(b) Montrer que le cercle circonscrit à IJK est l'unique ellipse de centre O contenant les points I, J et K.

2. Soit ABC un triangle équilatéral et R le rayon de son cercle circonscrit. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de R.

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \cos(y - x) = \cos x \\ \cos(y - x) = \cos y \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $0 < x < y < 2\pi$.

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R > 0$. On note O son centre.

(a) Étant donné un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(R, 0)$, $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$ et $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$, avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$.

i. Montrer que l'aire du triangle ABC est

$$\frac{R^2}{2}\left(\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta\right).$$

Dans la suite, cette aire sera notée $f(\beta, \gamma)$.

ii. Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

iii. Déterminer β_0 et γ_0. Quelle est alors la nature du triangle obtenu ?

(b) Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

5. Démontrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{T}$, alors

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

6. Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 1, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. *On rappelle que toute ellipse peut-être transformée en un cercle par une affinité orthogonale et qu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires.*

Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.

(b) Enoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.

(c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det A > 0$. La réciproque est-elle vraie ?

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $\det A_k > 0$.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Etant donné un entier naturel m non nul, α, α_1, ..., α_m désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Démontrer par récurrence sur m que $\det M = \alpha - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2$.

(b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det M > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ $\det A_k > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6 et 7.

9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III. 1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application Φ_A qui au couple $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A, alors ${}^tPAP = I_n$.

3. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à la matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A. Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

4. En déduire qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$. Que représentent les coefficients diagonaux de D ?

5. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.

(b) En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E, le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.
On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$, $[u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.
Étant donnée une partie $\mathcal{C}$ de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2).$$

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.

2. On suppose de plus E normé. On considère une partie $\mathcal{C}$ non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.

(b) Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.

III.3 Volume d'un ellipsoïde

On admet qu'il existe une constante k_n ne dépendant que de n telle que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le volume de $\mathcal{E}_A$ est :

$$\frac{k_n}{\sqrt{\det A}}.$$

On s'intéresse à la fonction ν définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $\nu(A) = \dfrac{1}{\sqrt{\det A}}$.

1. Déterminer k_2 et k_3.

2. Montrer (sans considération de volume) que, si l'on a l'inclusion $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$, alors $\nu(A) \leq \nu(B)$.

3. Montrer que ν est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in]0,1[$,

$$\ln(t + (1-t)\lambda) \geq (1-t)\ln\lambda.$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\lambda = 1$. *On pourra, pour t fixé dans $]0,1[$, étudier la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda.$$

(b) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0,1]$,

$$e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b.$$

(c) i. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii. Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. En reprenant les notations de III.1.4, exprimer $\det A$, $\det B$ et $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det Q$ et des coefficients diagonaux de D.

iii. Montrer que ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

5. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On considère l'ensemble $M(\mathcal{E}_A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, \exists X \in \mathcal{E}_A \quad Y = MX\}$ qu'on pourra aussi écrire sous la forme $\{MX \,;\, X \in \mathcal{E}_A\}$. Montrer que $M(\mathcal{E}_A)$ est un ellipsoïde ; déterminer la matrice symétrique définie positive B telle que $M(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_B$. Donner une relation entre le volume de $\mathcal{E}_A$ et celui de $M(\mathcal{E}_A)$.

III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne usuelle et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée :
si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{{}^tXX}$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \dfrac{||AX||}{||X||}$.

On considère un compact K de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intérieur non vide. Il existe alors $X_0 \in K$ et ε un réel strictement positif tels que la boule fermée $B(X_0, \varepsilon)$ soit incluse dans K.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $K \subset \mathcal{E}_A$.

(a) Montrer que $\mathcal{E}_A$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser que $X \mapsto ({}^tXAX)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que si $X \in \mathcal{E}_A$, alors $-X \in \mathcal{E}_A$.

(c) Montrer que pour tout $X \in B(0,\varepsilon)$, $X_0 + X$ et $-X_0 + X$ appartiennent à $\mathcal{E}_A$ et en déduire que $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$.

(d) Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \leq 1/\varepsilon^2$.
On pourra considérer un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ.

(e) Montrer que $|||A||| \leq 1/\varepsilon^2$.

2. Montrer qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ tel que $K \subset \mathcal{E}$.

Dans la suite, on fixe $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_{A_0}$ et on considère l'ensemble :

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \,/\, \det A \geq \det A_0 \text{ et } \forall X \in K,\ 0 \leq {}^tXAX \leq 1\}.$$

3. (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{M}$ est borné.

(c) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie convexe.

On pourra utiliser la convexité de ν sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ démontrée en III.3.4.

4. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde $\mathcal{E}$ de volume minimal contenant K.

5. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in [-1, 1] \text{ et } y = 0\}$.

(a) Quel est l'intérieur de K ?

(b) Existe-t-il une ellipse d'aire minimale contenant K ?

6.2 Corrigé

Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

I.1.a. Dire que $\mathcal{E}$ admet O comme centre de symétrie revient à dire que si $M(x, y) \in \mathcal{E}$ alors son symétrique $M'(-x, -y)$ par rapport à O appartient encore à $\mathcal{E}$. Pour tout $M(x, y) \in \mathcal{E}$, on a donc non seulement :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

mais aussi :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy - dx - ey + f = 0.$$

En soustrayant membre à membre, on obtient $dx + ey = 0$, de sorte que :

$$M(x, y) \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad dx + ey = 0.$$

Si $(d, e) \neq (0, 0)$, $dx + ey = 0$ est l'équation d'une droite et l'implication précédente montre que l'ellipse $\mathcal{E}$ est incluse dans cette droite, ce qui est absurde. Donc $(d, e) = (0, 0)$.

[0] ag81 v1.04 — Solution proposée par D.-J. Mercier.

Autre méthode — D'après le cours ([5], Th. 352), les coordonnées du centre de symétrie d'une hyperbole ou d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $f(x,y)=0$ (où f est un polynôme du second degré en x, y) sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2cy + d = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2by + 2cx + e = 0. \end{cases}$$

Ce centre sera l'origine du repère si et seulement si ce système admet la solution $(0,0)$, c'est-à-dire $d=e=0$.

I.1.b. Une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O qui contient I, J et K admet une équation de la forme $ax^2+by^2+2cxy+f=0$ avec :

$$\begin{cases} a+f=0 \\ a\dfrac{1}{4}+b\dfrac{3}{4}+2c\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+f=0 \\ a\dfrac{1}{4}+b\dfrac{3}{4}+2c\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)+f=0. \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} a+f=0 \\ a+3b-2c\sqrt{3}+4f=0 \\ a+3b+2c\sqrt{3}+4f=0 \end{cases}$$

ou encore, en soustrayant et additionnant les deux dernières équations :

$$\begin{cases} a+f=0 \\ a+3b+4f=0 \\ c=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f=-a \\ b=a \\ c=0. \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ est donc l'ellipse d'équation $ax^2+ay^2-a=0$, qui s'écrit $x^2+y^2=1$ puisque a ne peut pas être nul. On reconnaît une équation du cercle de centre O et de rayon 1. C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

I.2. Soit H le projeté du centre O du cercle circonscrit à ABC sur (BC). On a :

$$BC = 2\times BH = 2R\sin\frac{\pi}{3} = R\sqrt{3} \quad \text{et} \quad OH = R\cos\frac{\pi}{3} = \frac{R}{2}$$

donc l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle équilatéral ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = 3\mathcal{A}_{OBC} = 3 \times \frac{BC \times OH}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

I.3. **Première solution** —

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \cos(y-x) = \cos x \\ \cos(y-x) = \cos y \end{array} \right. \Rightarrow \cos x = \cos y$$
$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \quad y = \varepsilon x + k2\pi$$

donc :

$$(S) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \varepsilon x + k2\pi \\ \cos((\varepsilon - 1)x) = \cos x \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \varepsilon x + k2\pi \\ (\varepsilon - 1)x = \varepsilon' x + k'2\pi. \end{array} \right.$$

On envisage les quatre cas possibles :

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, \pm 1)$, (S) entraîne $0 = \pm x + k'2\pi$ soit $x = \pm k'2\pi$. La condition $0 < x < y < 2\pi$ ne pourra pas être satisfaite. Dans ce cas, il n'y aura pas de solution dans l'intervalle demandé.

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, -1)$, (S) implique que $-2x = -x + k'2\pi$, et l'on retrouve que x doit être congru à 0 modulo 2π. Impossible.

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, 1)$, (S) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x + k2\pi \\ -2x = x + k'2\pi \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{-k'2\pi}{3}$$

donc :

$$(S) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \end{array} \right. \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{4\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \end{array} \right. \right).$$

En conclusion (S) admet une seule solution (x, y) telle que $0 < x < y < 2\pi$, à savoir $(2\pi/3, 4\pi/3)$.

Deuxième solution[1] — On utilise le fait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et strictement croissante sur $[\pi,2\pi]$. Si $y\in[0,\pi]$, comme $0<x<y$, on a $\cos x>\cos y$, ce qui contredit (S) qui nous dit que $\cos x=\cos y$. De même $x\in[\pi,2\pi]$ donne $\cos x<\cos y$.

Ainsi $x\in\,]0,\pi[$ et $y\in\,]\pi,2\pi[$.

• Si $y-x\in[\pi,2\pi[$, $\cos(y-x)=\cos y$ impose $y-x=y$, d'où $x=2y$, ce qui est absurde car $x<y$.

• Donc $y-x\in\,]0,\pi[$ et $\cos(y-x)=\cos x$ impose $y-x=x$ puisque cos est injective sur $]0,\pi[$. On a donc $y=2x$ et $\cos(y-x)=\cos y$ nous donne $\cos x=\cos 2x=2\cos^2 x-1$, c'est-à-dire que $\lambda=\cos x$ est solution de $2\lambda^2-\lambda-1=(2\lambda+1)(\lambda-1)=0$, donc $\cos x=\lambda=-1/2$ puisque $x\in\,]0,\pi[$.

En définitive $x=2\pi/3$ et $y=2x=4\pi/3$.

Troisième solution — Avec $2\cos\theta=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$, pour tout réel θ, le système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} e^{i(y-x)}+e^{-i(y-x)}=e^{ix}+e^{-ix}\\ e^{i(y-x)}+e^{-i(y-x)}=e^{iy}+e^{-iy}\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} e^{ix}\left(1-e^{-iy}\right)+e^{-ix}\left(1-e^{iy}\right)=0\\ e^{iy}\left(1-e^{-ix}\right)+e^{-iy}\left(1-e^{ix}\right)=0\end{cases}$$

et avec :

$$1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}})=-2i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

cela s'écrit :

$$\begin{cases} \sin\dfrac{y}{2}\times\left(-e^{ix}e^{-i\frac{y}{2}}+e^{-ix}e^{i\frac{y}{2}}\right)=0\\ \sin\dfrac{x}{2}\times\left(-e^{iy}e^{-i\frac{x}{2}}+e^{-iy}e^{i\frac{x}{2}}\right)=0\end{cases}$$

Comme x et y sont dans $]0,2\pi[$, les réels $x/2$ et $y/2$ sont dans $]0,\pi[$, de sorte que $\sin(x/2)>0$ et $\sin(y/2)>0$. Notre système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} -e^{ix}e^{-i\frac{y}{2}}+e^{-ix}e^{i\frac{y}{2}}=0\\ -e^{iy}e^{-i\frac{x}{2}}+e^{-iy}e^{i\frac{x}{2}}=0\end{cases}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} -e^{ix}+e^{-ix}e^{iy}=0\\ -e^{iy}+e^{-iy}e^{ix}=0\end{cases}$$

[1] La deuxième et la troisième solution sont proposées par Jean-Etienne Rombaldi.

c'est-à-dire que $\lambda = e^{ix}$ et $\mu = e^{iy}$ sont racines de :

$$\begin{cases} -\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\mu = 0 \\ -\mu + \dfrac{1}{\mu}\lambda = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \mu = \lambda^2 \\ \lambda = \mu^2 \end{cases}$$

On a donc $\lambda^4 = \lambda$ et $\mu^4 = \mu$ avec $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, ce qui donne $\lambda^3 = \mu^3 = 1$ et $\lambda\mu = \mu^3 = 1$, soit $\mu = 1/\lambda$. En définitive :

$$(\lambda, \mu) \in \left\{ (1,1), (e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}), (e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}) \right\}$$

et la condition supplémentaire $x < y$ nous donne $(\lambda, \mu) = (e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}})$ pour unique solution, soit $(x, y) = (2\pi/3, 4\pi/3)$, ce qui peut se vérifier.

I.4.a.i. L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} R\cos\beta - R & R\cos\gamma - R \\ R\sin\beta & R\sin\gamma \end{vmatrix},$$

le déterminant étant pris dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{R^2}{2}\left|(\cos\beta - 1)\sin\gamma - \sin\beta\,(\cos\gamma - 1)\right| \\ &= \frac{R^2}{2}\left|\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma + \sin\beta\right| \\ &= \frac{R^2}{2}\left|\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta\right|. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression la valeur absolue est inutile car s'applique toujours à un nombre positif. En effet :

$$\begin{aligned} \xi &= \sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta \\ &= \sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma + \sin\beta \\ &= \sin\gamma\,(\cos\beta - 1) + \sin\beta\,(1 - \cos\gamma) \\ &= \sin\gamma\left(-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin\beta\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin\beta\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\xi &= 4\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\\ &= 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right). \quad (*)\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$, les arguments $\beta/2$, $\gamma/2$ et $(\gamma-\beta)/2$ des sinus de la formule $(*)$ sont tous dans $[0,\pi]$, donc ces sinus sont positifs et $\xi \geq 0$. Finalement :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{R^2}{2}\left(\sin(\gamma-\beta) - \sin\gamma + \sin\beta\right).$$

I.4.a.ii. f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^2$ dont les valeurs $f(\beta,\gamma)$ ne dépendent que des classes de β et γ modulo 2π. Donc $f(\mathbb{R}^2) = f(K)$ où $K = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ est un compact. Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes, donc il existe $(\beta_0,\gamma_0) \in K$ tel que :

$$f(\beta_0,\gamma_0) = \mathrm{Max}_K\{f(\beta,\gamma)\} = \mathrm{Max}_{\mathbb{R}^2}\{f(\beta,\gamma)\}.$$

On a $f(\beta,2\pi) = f(0,\gamma) = f(\beta,\beta) = 0$ quels que soient β, γ, et il est facile de voir qu'il existe un couple (β,γ) tel que $f(\beta,\gamma) > 0$, par exemple en calculant :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{R^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \frac{3R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{3} \;=\; \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

On a donc nécessairement $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$. Notons au passage que f étant positive (c'est une aire), le minimum de f est 0, et que ce minimum est atteint en au moins tous les couples (β,γ) dont l'une au moins des coordonnées est nulle.

I.4.a.iii. Si f admet un extremum en (β,γ), les dérivées partielles de f en (β,γ) sont nulles :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\beta} = \dfrac{R^2}{2}\left(-\cos(\gamma-\beta) + \cos\beta\right) = 0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial\gamma} = \dfrac{R^2}{2}\left(\cos(\gamma-\beta) - \cos\gamma\right) = 0\end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \cos(\gamma - \beta) = \cos\beta \\ \cos(\gamma - \beta) = \cos\gamma. \end{cases}$$

On retrouve le système (S) résolu à la question I.3. Comme f admet un maximum en (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$, la question I.3 donne $(\beta_0, \gamma_0) = (2\pi/3, 4\pi/3)$. Le triangle ABC obtenu est équilatéral puisqu'il possède deux angles qui valent $2\pi/3$ modulo 2π.

I.4.b. On a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = f(\beta, \gamma) \leq f(\beta_0, \gamma_0) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

quel que soit le triangle ABC inscrit dans $\mathcal{C}$, et $f(\beta_0, \gamma_0) = \mathcal{A}_{IJK}$ où IJK est le triangle équilatéral défini en I.1. On peut donc affirmer que les triangles d'aires maximales inscrits dans $\mathcal{C}$ sont les triangles équilatéraux, et que l'aire maximale obtenue est $3R^2\sqrt{3}/4$.

I.5. • Soit R le rayon de $\mathcal{C}$. On a $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2$. Si (β, γ) désigne un couple de réels tels que $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma)$ et $0 < \beta < \gamma < 2\pi$, la question I.4 donne :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma) \leq f(\beta_0, \gamma_0) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

donc :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{\pi R^2}{f(\beta, \gamma)} \geq \frac{\pi R^2}{f(\beta_0, \gamma_0)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

• Si $\mathcal{T}$ est équilatéral, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta_0, \gamma_0)$ avec les notations de I.4, donc :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{\pi R^2}{f(\beta_0, \gamma_0)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

• Réciproquement, si $\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, notons (β, γ) un couple de réels tels que $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma)$ et $0 < \beta < \gamma < 2\pi$. Notons R le rayon du cercle circonscrit à $\mathcal{T}$. On obtient :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = f(\beta_0, \gamma_0) = \mathrm{Max}_K\{f(\beta, \gamma)\}.$$

D'après I.4, le maximum de f sur K est atteint en (β_0, γ_0) et seulement en ce point. L'égalité $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma) = f(\beta_0, \gamma_0)$ entraîne donc $(\beta, \gamma) = (\beta_0, \gamma_0)$, et cela prouve que $\mathcal{T}$ est équilatéral.

I.6. • *Existence* — Soit $\mathcal{E}$ une ellipse circonscrite au triangle IJK. Soit φ une affinité orthogonale qui transforme $\mathcal{E}$ en un cercle $\varphi(\mathcal{E})$. Posons $A = \varphi(I)$,

$B = \varphi(J)$ et $C = \varphi(K)$. Comme φ conserve les rapports d'aires, la question I.5 permet d'écrire :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}{\mathcal{A}_{IJK}} = \frac{\mathcal{A}_{\varphi(\mathcal{E})}}{\mathcal{A}_{ABC}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

d'où :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \mathcal{A}_{IJK} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \pi R^2 = \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ désigne l'aire du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à IJK. On a montré que $\mathcal{C}$ est une ellipse contenant I, J, K délimitant une surface d'aire minimale.

• *Unicité* — Supposons que $\mathcal{E}$ soit une ellipse circonscrite au triangle IJK délimitant une surface d'aire minimale $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2$. En définissant φ comme ci-dessus, on obtient :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \mathcal{A}_{IJK}$$

soit

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}{\mathcal{A}_{IJK}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

d'où

$$\frac{\mathcal{A}_{\varphi(\mathcal{E})}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puisque φ conserve les rapports d'aires. La question I.5 montre alors que ABC est équilatéral. Mais alors le centre de gravité Ω du triangle équilatéral ABC coïncide avec le centre du cercle $\varphi(\mathcal{E})$ circonscrit au triangle ABC. On sait que :

- φ est affine, donc conserve les barycentres. Comme O est l'isobarycentre de I, J, K, on a donc $\varphi(O) = \Omega$.

- φ est une bijection affine, donc transforme le centre de symétrie d'une figure Λ en le centre de symétrie de la figure $\varphi(\Lambda)$. Appliquons cette propriété à φ^{-1}. Comme Ω est le centre de symétrie du cercle $\varphi(\mathcal{E})$, on en déduit que $\varphi^{-1}(\Omega) = O$ est le centre de symétrie de l'ellipse $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_{ABC}) = \mathcal{E}$.

Finalement $\mathcal{E}$ est une ellipse circonscrite au triangle IJK et de centre de symétrie O. La question I.1.b montre que $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, et l'unicité est prouvée.

Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

II.1. Si $D = \text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est une matrice diagonale dont tous les coefficients λ_i de la diagonale principale sont strictement positifs, pour tout vecteur-colonne $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ non nul,

$$ {}^tXDX = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 $$

est strictement positif comme somme de termes positifs dont l'un au moins est strictement positif. Cela signifie que $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2.a. Si λ est une valeur propre de A, et si $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ est un vecteur propre (non nul) associé, alors ${}^tXAX > 0$. Mais :

$$ {}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda ||X||^2 $$

où $||X||^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 > 0$. On a donc $\lambda||X||^2 > 0$, c'est-à-dire $\lambda > 0$. Toutes les valeurs propres de A sont donc strictement positives.

II.2.b. Un théorème du cours[2] énonce que toute matrice réelle symétrique A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, ce qui signifie qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = P^{-1}DP$. Comme P est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$, et

$$ A = P^{-1}DP = {}^tPDP. $$

II.2.c. Les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de la matrice D définie dans la question précédente. Si ces termes sont tous strictement positifs, alors pour tout $X \neq 0$,

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) > 0 $$

en appliquant II.1 et puisque $PX \neq 0$ (P étant inversible !). Cela démontre que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.3. • Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la question II.2 montre qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de termes diagonaux strictement positifs, et

[2] Voir "Cours de géométrie" [5] Théorème 382 et Corollaire 30.

une matrice orthogonale P, telles que $A = {}^tPDP$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, posons $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ et $\Delta = \text{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)$. On a $D = \Delta^2$, donc :

$$A = {}^tPDP = {}^tP\Delta^2P = {}^t(\Delta P)(\Delta P) = {}^tQQ$$

en notant $Q = \Delta P$. Et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ comme tout produit de deux matrices inversibles.

• Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe une matrice $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$, alors ${}^tA = {}^t({}^tQQ) = {}^tQ\,{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$ donc A est symétrique, et pour tout $X \neq 0$,

$${}^tXAX = {}^tX\,{}^tQQX = {}^t(QX)(QX) = ||QX||^2 > 0$$

(puisque $X \neq 0$ entraîne $QX \neq 0$, Q étant inversible), donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.4. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la question précédente montre que A s'écrit $A = {}^tQQ$ avec Q inversible. Par suite $\det Q \neq 0$ et $\det A = \det({}^tQQ) = (\det Q)^2 > 0$. La réciproque est fausse car la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est réelle symétrique, de déterminant $\det A = 5 > 0$, et pourtant ses valeurs propres ne sont pas toutes strictement positives donc $A \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.5. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \neq 0$. En particulier, si l'on prend des vecteurs-colonnes de la forme $X = {}^t(x_1, ..., x_k, 0, ...0)$, on obtient pour tout $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$:

$${}^tXAX = (x_1, ..., x_k, 0, ...0) \begin{pmatrix} A_k & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, ..., x_k)\, A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} > 0$$

donc $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. La question II.4 montre alors que $\det A_k > 0$.

II.6. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} A_n & B \\ {}^tB & a \end{pmatrix}.$$

Comme $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la question précédente montre qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tQQ$. Le produit Π de l'énoncé s'écrit :

$$\begin{aligned}\Pi &= \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQ & {}^tQC \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc tout revient à trouver C et α tels que :

$$\begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B \\ {}^tB & a \end{pmatrix}$$

sachant que B et a sont connus. Il suffit de prendre $\alpha = a$ et $C = {}^tQ^{-1}B$ pour avoir ${}^tQC = B$, et de vérifier que la dernière égalité ${}^tCQ = {}^tB$ à satisfaire devient triviale : il suffit de transposer les deux membres de ${}^tQC = B$ pour obtenir ${}^tCQ = {}^tB$.

II.7.a. Si $m = 1$,

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - \alpha_1^2$$

est la propriété est vraie. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $m-1$, et montrons-la au rang m. En développant le déterminant suivant la première colonne :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{vmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \end{vmatrix}.$$

En appliquant l'hypothèse récurrente au rang $m-1$, et en calculant le second déterminant, on obtient :

$$\det M = \alpha - \sum_{i=2}^{m}\alpha_i^2 + (-1)^{m+2}\alpha_1 \times (-1)^{m+1}\alpha_1 = \alpha - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2,$$

ce qui démontre la propriété au rang m.

II.7.b. ${}^tXMX = x_1^2 + .. + x_m^2 + \alpha x_{m+1}^2 + 2\alpha_1 x_1 x_{m+1} + ... + 2\alpha_m x_m x_{m+1}$. Par hypothèse $\det M > 0$, donc $\alpha > \sum_{i=1}^m \alpha_i^2$. Si $x_{m+1} \neq 0$, on aura donc :

$$\begin{aligned} {}^tXMX &> x_1^2 + .. + x_m^2 + \sum\nolimits_{i=1}^m \alpha_i^2 x_{m+1}^2 + 2x_{m+1} \sum\nolimits_{i=1}^m \alpha_i x_i \\ &> \sum\nolimits_{i=1}^m (x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 \ \geq \ 0. \end{aligned}$$

Si $x_{m+1} = 0$, on obtient ${}^tXMX = x_1^2 + .. + x_m^2$, et cette expression reste strictement positive tant que $(x_1, ..., x_m) \neq (0, ..., 0)$. Finalement ${}^tXMX > 0$ pour tout $X \neq 0$, donc $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

II.8. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial : on a $A = (\lambda_1)$ et $\det A = \lambda_1 > 0$ donc ${}^tXMX = \lambda_1 x^2 > 0$ pour tout réel x non nul, donc $A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, et montrons-là au rang $n+1$. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n+1\}$. En particulier $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, et l'hypothèse récurrente au rang n montre que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. La question II.6 montre l'existence de $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = {}^tRMR \quad \text{avec } R = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}.$$

M est du même type que la matrice de la question II.7, R est inversible, et :

$$\begin{aligned} \det M &= \det\left({}^tR^{-1}AR^{-1}\right) \\ &= \det({}^tR^{-1}) \times \det A \times \det(R^{-1}) \\ &= (\det R)^{-2} \times \det A > 0 \end{aligned}$$

car $\det A > 0$ par hypothèse. La question II.7.b montre que $M \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$. Si maintenant $X \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$,

$${}^tXAX = {}^tX({}^tRMR)X = {}^t(RX)M(RX) > 0$$

car $M \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$ et $RX \neq 0$ (puisque R est inversible). Cela prouve que $A \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque — Une autre façon de conclure consiste à noter que l'égalité $A = {}^tRMR$ signifie que les matrices A et M représentent la même forme bilinéaire symétrique φ, mais dans des bases différentes, et qu'ainsi :

$$(A \text{ définie positive}) \Leftrightarrow (\varphi \text{ définie positive}) \Leftrightarrow (M \text{ définie positive}).$$

II.9. Les questions II.5 et II.8 montrent que, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1, ..., n\} \quad \det A_k > 0.$$

Les fonctions :

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \det A_k \end{array}$$

sont continues sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ puisque les déterminants $\det A_k$ s'expriment comme des fonctions polynomiales des coefficients de la matrice A. Ainsi, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $f_k^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une intersection finie d'ouverts.

Remarque — On peut en fait montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice A, avec la continuité de l'application $M \mapsto {}^tXMX$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, on déduit que :

$${}^tXAX = \lim_{k\to+\infty} {}^tXA_kX \geq 0$$

et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. L'ensemble est donc fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Pour A, B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$, on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tX\left((1-t)A + tB\right)X = (1-t)\,{}^tXAX + t\,{}^tXBX \geq 0$$

et $(1-t)A + tB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. L'ensemble est donc convexe dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
On sait déjà que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{O}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in \mathcal{O}$ qui n'est pas définie positive. Cette matrice a donc au moins une de ses valeurs propres qui est nulle et il existe une matrice orthogonale P telle que :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

les λ_k étant positifs ou nul pour k compris entre 2 et n. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k \geq k_0$ la matrice :

$$A_k = P \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$$

soit dans $\mathcal{O}$, ce qui est incompatible avec $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ puisque A_k a une valeur propre strictement négative. On a donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'intérieur de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1.1. *Première solution (référence au cours)* — D'après le cours, toute application bilinéaire φ définie sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit matriciellement sous la forme $\varphi(X,Y) = {}^tXMY$ où M est une matrice carrée de taille n et où X et Y désignent les vecteurs-colonnes des coordonnées de vecteurs x, y de E dans une base $e = (e_1, ..., e_n)$ de E.
On a aussi appris, dans le cours[3], que :

- La réciproque est vraie : toute application de E dans $\mathbb{R}$ définie matriciellement par une relation de la forme $\varphi(X,Y) = {}^tXMY$, est une forme bilinéaire.

- M est par définition la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base e. On la note $\mathrm{Mat}(\varphi; e)$.

- φ est symétrique si et seulement si sa matrice M est symétrique, c'est-à-dire vérifie ${}^tM = M$.

Ici, on peut donc affirmer que l'application $(X,Y) \mapsto \Phi_A(X,Y) = {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique. La définie positivité de A permet d'écrire $\Phi_A(X,X) = {}^tXAX > 0$ quel que soit $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ce qui prouve que Φ_A est une forme bilinéaire symétrique définie positive, autrement dit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Seconde solution (vérification point par point) — On vérifie facilement que Φ_A est une forme bilinéaire symétrique. La symétrie ne fait aucun doute puisque si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAY$ est un réel donc :

$$\Phi_A(X,Y) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tYAX = \Phi_A(Y,X).$$

La bilinéarité revient donc à la linéarité à gauche qui se vérifie facilement : si $X, X', Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi_A(X + \lambda X', Y) &= {}^t(X + \lambda X')AY \\ &= {}^tXAY + \lambda X'AY \\ &= \Phi_A(X,Y) + \lambda\Phi_A(X',Y).\end{aligned}$$

[3]Il est indispensable de bien connaître tout le chapitre sur les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques tel qu'on peut le lire, par exemple, dans mon "Cours de géométrie" [5] ou dans les "Fondamentaux de géométrie" [6]. Tout ce que j'ai rassemblé dans ces chapitres sert à l'écrit pour réagir sur des problèmes comme celui-ci, et à l'oral pour servir de "background" permettant de répondre très précisément à des questions des examinateurs. Il faut donc investir dans ces lectures avant les concours.

Cela étant, la définie positivité de A permet d'écrire $\Phi_A(X,X) = {}^tXAX > 0$ quel que soit $X \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, donc Φ_A est définie positive. Finalement Φ_A est une bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque stratégique — Je sais ce que me demanderaient mes étudiants ! Ils voudraient savoir quelle réponse donner : la première ou la seconde. Voici comment je pourrais répondre : premièrement, qu'il faut trouver une solution, et la trouver le plus vite possible, donc il faut présenter la méthode que l'on imagine le mieux à l'instant donné. Secondement, qu'il faut aussi suivre ses penchants, choisir rapidement une stratégie qui nous fasse plaisir, et la mettre en oeuvre. On est à la bourre !
Si la première solution est inattaquable quand on se rappelle du cours, la seconde est plus précise et nécessite moins de prérequis, donc risque de rapporter plus.
Je choisirais donc la réponse qui me vient le plus rapidement à l'esprit pour passer aux autres questions, quitte à revenir proposer une seconde démonstration à la fin de l'épreuve si je n'ai plus que cela à faire, ce dont je doute ! Ici, la seconde solution me semble plus rapide et efficace pour engranger des points.

III.1.2. Soit $P = [e'_1, ..., e'_n]$ la matrice formée par les coordonnées d'une base Φ_A-orthonormale $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ dans la base canonique $e = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On sait (d'après le cours !) que dire que $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ est une base Φ_A-orthonormale équivaut à dire que la matrice de Φ_A dans la base e' est l'identité I, autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(\Phi_A; e') = I.$$

Toujours d'après le cours,

$$I = \mathrm{Mat}(\Phi_A; e') = {}^tP\,\mathrm{Mat}(\Phi_A; e)P = {}^tPAP.$$

III.1.3. • L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & X & \mapsto & A^{-1}BX \end{array}$$

est linéaire puisque :

$$f(X + \lambda Y) = A^{-1}B(X + \lambda Y) = A^{-1}BX + \lambda A^{-1}BY = f(X) + \lambda f(Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est une endomorphisme symétrique pour Φ_A car $\Phi_A(f(X), Y) = \Phi_A(X, f(Y))$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$. En effet :

$$\begin{aligned} \Phi_A(f(X), Y) = \Phi_A(X, f(Y)) &\Leftrightarrow {}^tf(X)AY = {}^tXAf(Y) \\ &\Leftrightarrow {}^tX\,{}^tB\,{}^tA^{-1}AY = {}^tXAA^{-1}BY \\ &\Leftrightarrow {}^tX\,{}^tBY = {}^tXBY \end{aligned}$$

et la dernière égalité est vraie puisque B est symétrique.

• L'écriture matricielle $f(X) = A^{-1}BX$ signifie que la matrice de f dans la base canonique est $A^{-1}B$, ce que je noterai $\mathrm{Mat}(f; e) = A^{-1}B$.

III.1.4. • D'après le cours, f étant un endomorphisme symétrique pour Φ_A, il est diagonalisable dans une base Φ_A-orthonormale. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice W dont les colonnes forment une base Φ_A-orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (ainsi $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), telles que[4] :

$$D = W^{-1}A^{-1}BW. \quad (*)$$

D'après (III.1.2), ${}^tWAW = I$, donc :

$$A = {}^tW^{-1}W^{-1} = {}^tQQ$$

si l'on pose $Q = W^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs $(*)$ entraîne :

$$\begin{aligned} B &= AWDW^{-1} \\ &= {}^tW^{-1}W^{-1}WDW^{-1} \\ &= {}^tW^{-1}DW^{-1} \\ &= {}^tQDQ. \end{aligned}$$

• Les matrices $A^{-1}B$ et $D = W^{-1}A^{-1}BW$ sont semblables. Elles représentent donc le même endomorphisme f dans deux bases différentes. Les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de D, coïncident ainsi avec les valeurs propres de $A^{-1}B$, qui sont aussi celles de f.

III.1.5.a. L'hypothèse $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ s'écrit successivement :

$$\begin{array}{lll} \forall X \in \mathbb{R}^n & {}^tXAX \leq 1 & \Rightarrow \quad {}^tXBX \leq 1 \\ \forall X \in \mathbb{R}^n & {}^tX\,{}^tQQX \leq 1 & \Rightarrow \; {}^tX\,{}^tQDQX \leq 1 \\ \forall X \in \mathbb{R}^n & {}^t(QX)QX \leq 1 & \Rightarrow \; {}^t(QX)D(QX) \leq 1. \end{array}$$

Comme Q est inversible, cela s'écrit :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^tYY \leq 1 \;\Rightarrow\; {}^tYDY \leq 1$$

ou encore :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad ||Y||^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; {}^tYDY \leq 1. \qquad (*)$$

[4] Ce sont les formules de changement de base qui le disent...

La question précédente montre que les valeurs propres de $A^{-1}B$ et de D coïncident. Si λ est une valeur propre de $A^{-1}B$, il existe donc un vecteur X_0 de norme 1 tel que $DX_0 = \lambda X_0$, et l'on peut appliquer $(*)$:

$$||X_0||^2 = 1 \;\Rightarrow\; {}^tX_0DX_0 \leq 1 \;\Rightarrow\; \lambda||X_0||^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; \lambda \leq 1.$$

III.1.5.b. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, notons $\mathrm{Sp}\,(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Cet ensemble est appelé le spectre de f. La question précédente donne :

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B \\ \mathcal{E}_B \subset \mathcal{E}_A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Sp}(A^{-1}B) \subset]-\infty, 1] \\ \mathrm{Sp}(B^{-1}A) \subset]-\infty, 1]\,. \end{array} \right.$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^{-1}B)$, alors $\lambda \neq 0$ puisque $A^{-1}B$ est inversible, et $1/\lambda \in \mathrm{Sp}(B^{-1}A)$ puisque $B^{-1}A$ est l'inverse de $A^{-1}B$. Ainsi :

$$\lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq 1.$$

Par hypothèse $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B = {}^tQDQ$ montrent que B et D représentent la même forme bilinéaire symétrique, mais dans deux bases différentes. Comme B est définie positive, il en sera de même de D, et donc toutes les valeurs propres de D, qui sont aussi celles de $A^{-1}B$, sont strictement positives. On a donc :

$$0 < \lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq 1,$$

ce qui entraîne $\lambda = 1$. Toutes les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont donc égales à 1. Mais $A^{-1}B$ est diagonalisable puisque $D = W^{-1}A^{-1}BW$. On a donc nécessairement $D = A^{-1}B = I$, d'où $A = B$.

III.2.1. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux parties convexes :

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall u, v \in \mathcal{C}_i \quad [u; v] \subset \mathcal{C}_i$$

donc :

$$\forall u, v \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \quad [u; v] \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2,$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe.

III.2.2.a. • *Existence* : φ est une application continue définie sur un compact $\mathcal{C}$. Elle atteint donc son minimum en un point de $\mathcal{C}$: il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\varphi(x_0) = \mathrm{Min}_{x \in \mathcal{C}}\, \varphi(x)$.

Remarque : Doit-on en dire plus ? Ce qui est certain, c'est que l'on doit pouvoir en dire plus à l'écrit (si on le décide) ou à l'oral (si un examinateur le demande). Voyons donc : l'image d'un compact par une application continue

est un compact, donc $\varphi(\mathcal{C})$ est un compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un fermé borné de $\mathbb{R}$. Comme la partie $\varphi(\mathcal{C})$ est bornée, elle est minorée donc possède une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(\mathcal{C})$ est fermée, cette borne inférieure appartient à $\varphi(\mathcal{C})$, ce qui fait dire que φ atteint son minimum en un point de $\mathcal{C}$.
Il va sans dire qu'il faut aussi savoir démontrer toutes les affirmations que l'on vient d'asséner pour répondre plus précisément à cette question.

• *Unicité* : Si x_0 et y_0 sont deux points distincts du convexe $\mathcal{C}$ qui vérifient $\varphi(x_0) = \varphi(y_0) = \mathrm{Min}_{x\in\mathcal{C}}\,\varphi(x)$, le segment $[x_0; y_0]$ est inclus dans $\mathcal{C}$ donc :

$$\forall t \in]0,1[\quad \varphi(tx_0 + (1-t)y_0) < t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(y_0) = \varphi(x_0).$$

Toutes les images des points $tx_0 + (1-t)y_0$ de $[x_0; y_0]$ par φ sont alors strictement inférieures à $\varphi(x_0) = \mathrm{Min}_{x\in\mathcal{C}}\,\varphi(x)$, ce qui est impossible ! Donc $x_0 = y_0$.

III.2.2.b. φ admet un maximum sur $\mathcal{C}$ pour les mêmes raisons qu'elle admet un minimum : une fonction continue sur un compact atteint ses bornes. Mais cette fois-ci, l'unicité n'est plus acquise. Pour s'en convaincre, il suffit de penser au disque fermée $\mathcal{D} = \overline{B(0,1)}$ de $E = \mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1, et de considérer l'application $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathcal{D}$ associe la distance $\mathrm{d}\,(0,x) = \sqrt{x_1^2 + x_1^2}$ de x à 0 (en notant $x = (x_1, x_2)$ et en considérant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, ce qui n'a pas de conséquence puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes). L'application φ est continue sur $\mathcal{D}$ et atteint son maximum en tout point du bord du disque $\mathcal{D}$.

III.3.1. • Cas où $n = 2$.
L'ellipsoïde $\mathcal{E}_A$ est l'intérieur d'une ellipse dont une équation réduite dans une base orthonormale (pour la structure euclidienne canonique dans le plan $\mathbb{R}^2$) est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\dagger)$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On démontre, en cours[5], que l'aire de l'intérieur de cette ellipse est πab. C'est le volume $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A)$ de $\mathcal{E}_A$. Ainsi :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \pi ab = \frac{k_2}{\sqrt{\det A}}$$

où $\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^2 \,/\, {}^tXAX \leq 1\}$. On sait, toujours d'après le cours sur les coniques, que l'on obtient une équation réduite du type (†) en diagonalisant la matrice A. Plus précisément, il existe une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

[5] Voir Section 6.3.1.

et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$, et telle que l'équation réduite (†) soit en fait la suivante :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1.$$

On a donc $\lambda_1 = 1/a^2$, $\lambda_2 = 1/b^2$, et :

$$\det A = \det D = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{a^2 b^2}.$$

Par suite $ab = 1/\sqrt{\det A}$ et $k_2 = \pi$.

- Cas où $n = 3$.

L'ellipsoïde $\mathcal{E}_A$ est l'intérieur d'une quadrique dont une équation réduite dans une base orthonormale s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\ddagger)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Un calcul de volume (utilisant des intégrales triples) donne[6] :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \frac{4\pi}{3} abc = \frac{k_3}{\sqrt{\det A}}.$$

Encore une fois la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ obtenue en diagonalisant A nous fournit l'équation (‡) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$$

donc $\lambda_1 = 1/a^2$, $\lambda_2 = 1/b^2$ et $\lambda_3 = 1/c^2$. Ainsi :

$$\det A = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$$

donc $abc = 1/\sqrt{\det A}$ et $k_3 = 4\pi/3$.

III.3.2. La question (III.1.5) montre que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$, alors le spectre de $A^{-1}B$ est inclus dans $]-\infty, 1]$. D'après (III.1.4), $D = W^{-1}A^{-1}BW$ donc D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de $A^{-1}B$. Soit $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Comme $\lambda_i \leq 1$ pour tout i, et comme tous les λ_i sont strictement positifs (cela puisque $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, comme on l'a déjà montré en répondant à la question

[6] Voir Section 6.3.2.

III.1.5.b : en effet, $B = {}^tQDQ$ montre que B et D représentent la même forme bilinéaire symétrique) :

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}B) = \det D = \lambda_1 ... \lambda_n \leq 1 &\Rightarrow \det B \leq \det A \\ &\Rightarrow 1/\sqrt{\det A} \leq 1/\sqrt{\det B} \\ &\Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B).\end{aligned}$$

III.3.3. L'application :

$$\begin{array}{rccc}\nu : & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & 1/\sqrt{\det A}\end{array}$$

est continue comme la composée de trois applications continues, à savoir :

- l'application "déterminant" det : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ fait correspondre son déterminant $\det A$. Cette application est continue car $\det A$ est un polynôme en les coefficients de A. On remarque que l'image de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par det est incluse dans $\mathbb{R}_+^*$.

- l'application racine carrée $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui a tout réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

- l'application inverse $i : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$; $x \mapsto 1/x$.

Avec ces notations, $\nu = i \circ \rho \circ \det$.

III.3.4.a. • *Première solution* : La fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est strictement concave d'après le cours, car sa dérivée seconde $x \mapsto -1/x^2$ reste strictement négative sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Cela signifie que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad a \neq b \quad \forall t \in]0,1[\quad \ln(ta + (1-t)b) > t \ln a + (1-t) \ln b.$$

Pour $a = 1$, on obtient :

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad \forall t \in]0,1[\quad \ln(t + (1-t)b) > (1-t) \ln b$$

avec égalité si et seulement si $b = 1$. C'est exactement ce qu'on nous demande de montrer !

• *Seconde solution* : Pour $t \in]0,1[$ fixé, l'application :

$$\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t) \ln \lambda$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée :

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-t}{t + (1-t)\lambda} - \frac{1-t}{\lambda} = t(1-t)\frac{\lambda - 1}{\lambda(t + (1-t)\lambda)}$$

soit :

$$\psi'(\lambda) = t\frac{\lambda - 1}{\lambda\left(\lambda - \frac{t}{t-1}\right)}.$$

Cette dérivée s'annule seulement en $\lambda = 1$. Lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda(\lambda - t/(t-1))$ reste positif donc $\psi'(\lambda)$ a le même signe que $\lambda - 1$, et le tableau de variations de ψ est :

λ	0		1		$+\infty$
$\psi'(\lambda)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\psi(\lambda)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Cela montre que $\psi(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, et comme $\psi(1) = 0$, cela achève la vérification.

III.3.4.b. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0, 1]$, on demande de montrer l'assertion :

$$(P) : \qquad e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b.$$

• *Première solution* : La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée seconde est positive. La propriété (P) ne fait que traduire cette convexité.

• *Seconde solution* : En appliquant le logarithme népérien des deux côtés de l'inégalité,

$$\begin{aligned}(P) &\Leftrightarrow ta + (1-t)b \leq \ln(te^a + (1-t)e^b) \\ &\Leftrightarrow ta + (1-t)b \leq \ln e^a + \ln(t + (1-t)e^{b-a}) \\ &\Leftrightarrow (1-t)(b-a) \leq \ln(t + (1-t)e^{b-a}).\end{aligned}$$

Posons $\lambda = e^{b-a}$. On a $\lambda > 0$ et la dernière inégalité écrite devient :

$$(1-t)\ln\lambda \leq \ln(t + (1-t)\lambda).$$

On reconnaît l'inégalité démontrée au (III.3.4.a). Celle-ci est donc vraie, et l'on peut ajouter que l'inégalité (P) sera une égalité si et seulement si $\lambda = 1$, c'est-à-dire $a = b$.

III.3.4.c.i. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe revient à montrer que, étant donné deux éléments A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le segment $[A, B]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit donc M un point du segment $[A, B]$. Il existe $t \in [0, 1]$ tel que $M = tA + (1-t)B$. Alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$${}^tXMX = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX > 0$$

puisque par hypothèse ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$, et puisque le barycentre à coefficients positifs ${}^tXMX$ des deux réels positifs ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ appartient au segment d'extrémités ces deux réels, segment qui est évidemment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

III.3.4.c.ii. On a $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$. Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $\det Q = \delta$. On obtient :

$$\begin{cases} \det A = \det({}^tQQ) = \delta^2 \\ \det B = \det({}^tQDQ) = (\det Q)^2 \det D = (\lambda_1 ... \lambda_n)\,\delta^2. \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} tA + (1-t)B &= t\,{}^tQQ + (1-t)\,{}^tQDQ \\ &= {}^tQ(tI + (1-t)D)Q \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \det(tA + (1-t)B) &= (\det Q)^2 \times \det(tI + (1-t)D) \\ &= \delta^2 \times \det[\operatorname{diag}(t + (1-t)\lambda_1, ..., t + (1-t)\lambda_n)]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\det(tA + (1-t)B) \;=\; \delta^2 \prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i)\,.$$

III.3.4.c.iii. Dire que ν est strictement convexe revient à dire que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $A \neq B$, et pour tout $t \in]0,1[$:

$$\nu(tA + (1-t)B) < t\nu(A) + (1-t)\nu(B).$$

Cela s'écrit successivement :

$$\frac{1}{\sqrt{\det(tA + (1-t)B)}} < \frac{t}{\sqrt{\det A}} + \frac{1-t}{\sqrt{\det B}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i)}} < t + \frac{1-t}{\sqrt{\lambda_1 ... \lambda_n}}$$

ou encore, en posant $\lambda = 1/\sqrt{\lambda_1 ... \lambda_n}$:

$$-\frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i) \right) < \ln(t + (1-t)\lambda)\,. \quad (*)$$

D'après III.3.4.a, $(1-t)\ln\lambda \leq \ln(t+(1-t)\lambda)$ avec égalité si et seulement si $\lambda = 1$. On aura donc montré $(*)$ si l'on prouve que :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)\right) < (1-t)\ln\lambda$$

ce qui s'écrit encore :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)\right) < -\frac{1}{2}(1-t)\ln\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

ou :

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(t+(1-t)\lambda_i) > \sum_{i=1}^{n}(1-t)\ln\lambda_i. \quad (\natural)$$

On sait, d'après (III.3.4.a), que $\ln(t+(1-t)\lambda_i) \geq (1-t)\ln\lambda_i$ pour tout i, avec égalité si et seulement si $\lambda_i = 1$. En sommant on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(t+(1-t)\lambda_i) \geq \sum_{i=1}^{n}(1-t)\ln\lambda_i$$

avec égalité si et seulement si $(\lambda_1,...,\lambda_n) = (1,...,1)$, cette dernière condition revenant à avoir $D = I$ donc $A = {}^tQQ = B$, ce qui est à rejeter puisque par hypothèse $A \neq B$. Finalement l'inégalité stricte $(\natural)$ est toujours vraie, et cela achève la démonstration.

III.3.5. • Si $Y \in M(\mathcal{E}_A)$, il existe $X \in \mathcal{E}_A$ tel que $Y = MX$, et ${}^tXAX \leq 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} {}^tXAX \leq 1 &\Leftrightarrow {}^t(M^{-1}Y)A(M^{-1}Y) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow {}^tY({}^tM^{-1}AM^{-1})Y \leq 1 \\ &\Leftrightarrow Y \in \mathcal{E}_{{}^tM^{-1}AM^{-1}} \end{aligned}$$

donc $M(\mathcal{E}_A) \subset \mathcal{E}_B$ où $B = {}^tM^{-1}AM^{-1}$. Réciproquement, si $Y \in \mathcal{E}_B$, comme la matrice M est bijective, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = MX$ et l'on peut remonter les équivalences précédentes pour obtenir ${}^tXAX \leq 1$, ce qui prouve que $X \in \mathcal{E}_A$ et $Y = MX \in M(\mathcal{E}_A)$. En conclusion :

$$M(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_B \quad \text{où } B = {}^tM^{-1}AM^{-1}.$$

• On a :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \frac{k_n}{\sqrt{\det A}}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M(\mathcal{E}_A)) &= \frac{k_n}{\sqrt{\det({}^tM^{-1}AM^{-1})}} \\ &= |\det M| \times \frac{k_n}{\sqrt{\det A}} \quad = \quad |\det M| \times \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A).\end{aligned}$$

III.4.1.a. D'après (III.1), l'application $(X,Y) \mapsto \Phi_A(X,Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire. Si l'on note $||X||_N = \sqrt{{}^tXAX}$ la norme associée,

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, {}^tXAX \leq 1\} = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, ||X||_N \leq 1\}$$

apparaît comme la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour $||\ ||_N$. Une boule est convexe. Cela se vérifie sans coup férir puisque, si $X, Y \in \mathcal{E}_A$, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}||tX + (1-t)\,Y||_N &\leq t\,||X||_N + (1-t)\ ||Y||_N \\ &\leq t + (1-t) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

III.4.1.b. La vérification est immédiate :

$$\begin{aligned}X \in \mathcal{E}_A &\Rightarrow\ {}^tXAX \leq 1 \\ &\Rightarrow\ {}^t(-X)A(-X) = {}^tXAX \leq 1 \\ &\Rightarrow\ -X \in \mathcal{E}_A.\end{aligned}$$

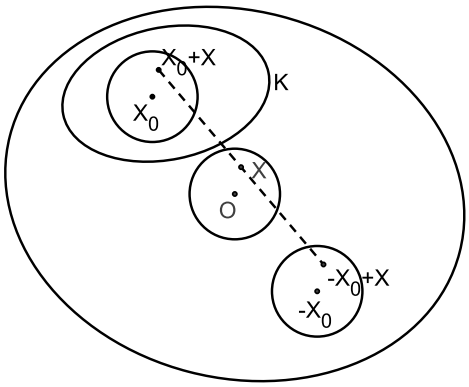


FIG. 6.1 – Visualisation

III.4.1.c. • La FIG. 6.1 permet d'avoir des idées et d'écrire :

$$\begin{aligned} ||X|| \leq \varepsilon \Rightarrow\ & ||(X_0 + X) - X_0|| \leq \varepsilon \\ \Rightarrow\ & X_0 + X \in B(X_0, \varepsilon) \subset K \subset \mathcal{E}_A \\ \Rightarrow\ & X_0 + X \in \mathcal{E}_A. \end{aligned}$$

• D'après (III.4.1.b), $\mathcal{E}_A$ est stable par la symétrie $s : X \mapsto -X$ par rapport à l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$. Comme par hypothèse $B(X_0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, on en déduit que $s\left(B(X_0, \varepsilon)\right) = B(-X_0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, et l'on peut recommencer comme au premier point :

$$\begin{aligned} ||X|| \leq \varepsilon \Rightarrow\ & ||(-X_0 + X) - (-X_0)|| \leq \varepsilon \\ \Rightarrow\ & -X_0 + X \in B(-X_0, \varepsilon) \subset K \subset \mathcal{E}_A \\ \Rightarrow\ & -X_0 + X \in \mathcal{E}_A. \end{aligned}$$

• Si $X \in B(0, \varepsilon)$, $X_0 + X$ et $-X_0 + X$ appartiennent à $\mathcal{E}_A$, et comme $\mathcal{E}_A$ est convexe, le milieu

$$X = \frac{1}{2}(X_0 + X) + \frac{1}{2}(-X_0 + X)$$

du segment $[X_0 + X; -X_0 + X]$ aussi. Ainsi $(X \in B(0, \varepsilon) \Rightarrow X \in \mathcal{E}_A)$, et l'on a bien l'inclusion $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$.

III.4.1.d. Si X est un vecteur propre (non nul) de A de norme 1 associé à la valeur propre λ, εX est de norme $||\varepsilon X|| = \varepsilon$ donc $\varepsilon X \in B(0, \varepsilon)$. On vient de démontrer que $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, donc $\varepsilon X \in \mathcal{E}_A$. Par suite :

$$^t(\varepsilon X) A (\varepsilon X) \leq 1.$$

Comme $^t(\varepsilon X) A (\varepsilon X) = \varepsilon^2\, {}^t X A X = \varepsilon^2\, {}^t X (\lambda X) = \lambda \varepsilon^2 ||X||^2 = \lambda \varepsilon^2$, on obtient bien $\lambda \leq 1/\varepsilon^2$.

III.4.1.e. On sait[7] que la norme opérateur $|||A|||$ de l'endomorphisme symétrique A est la plus grande valeur absolue des valeurs propres de A :

$$|||A||| = \mathrm{Sup}_{X \neq 0} \frac{||AX||}{||X||} = \mathrm{Sup}\left\{|\lambda| \ / \ \lambda \text{ valeur propre de } A\right\}.$$

Comme on vient de démontrer que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à $1/\varepsilon^2$, et comme ces valeurs propres sont positives par hypothèse, on obtient $|||A||| \leq 1/\varepsilon^2$.

[7] Voir Section 6.3.3.

III.4.2. K est un compact de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un borné et il existe une boule fermée $B(0,r)$ qui le contient. On a :

$$\begin{aligned} B(0,r) &= \{X = {}^t(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, {}^tXX \leq 1\} \\ &= \mathcal{E}_I \end{aligned}$$

où I est la matrice identité. Ainsi $B(0,r)$ est un ellipsoïde qui contient K.

III.4.3.a. Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont positives. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ telles que $D = P^{-1}AP$, et tous les λ_i sont positifs ou nuls. Mais $\det A = \lambda_1...\lambda_n \geq \det A_0 > 0$ puisque $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $\lambda_i > 0$ quel que soit i, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.4.3.b. Choisissons une boule fermée $B(X_0,\varepsilon)$ incluse dans K ($\varepsilon > 0$) comme au début de la partie (III.4). Si $A \in \mathcal{M}$, alors $0 \leq {}^tXAX \leq 1$ pour tout $X \in K$, donc $K \subset \mathcal{E}_A$. Cette inclusion nous permet d'utiliser la question (III.4.1.e) et obtenir la majoration $|||A||| \leq 1/\varepsilon^2$. La borne $1/\varepsilon^2$ ne dépend que de ε qui ne dépend que de K. On a trouvé une constante $1/\varepsilon^2$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad |||A||| \leq 1/\varepsilon^2$$

ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est borné.

III.4.3.c. Montrer que $\mathcal{M}$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ revient à montrer que, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}$ qui tend vers $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A appartient à $\mathcal{M}$. Considérons-donc une telle suite.

- $A_k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout k, donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXA_kX \geq 0.$$

Posons $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes les normes sont équivalentes (c'est un espace vectoriel de dimension finie n^2), et en particulier la norme opérateur $|||A|||$ et la "norme du sup" $||A||_\infty = \text{Sup}\,|a_{ij}|$ sont équivalentes. Les topologies induites sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ces normes sont les mêmes, et $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ se lit indifféremment pour la norme opérateur ou pour la "norme du sup". On peut donc dire que, si $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$, alors $\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$.
Mais ${}^tXA_kX \geq 0$ s'écrit $\sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} x_i x_j \geq 0$, et donne $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \geq 0$ en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$. Par suite $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Pour tout k, $\det A_k \geq \det A_0$. La fonction $A \mapsto \det A$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ puisqu'un déterminant est une fonction polynomiale des

coefficients de la matrice, donc on peut passer à la limite dans l'inégalité $\det A_k \geq \det A_0$ lorsque k tend vers $+\infty$ pour obtenir $\det A \geq \det A_0$.

• Enfin :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall X \in K \quad 0 \leq {}^tXA_kX \leq 1.$$

Encore une fois ${}^tXA_kX = \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} x_i x_j \geq 0$, et $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ entraîne :

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$$

quel que soit le couple (i,j) fixé. En passant à la limite dans les inégalités $0 \leq {}^tXA_kX \leq 1$, on obtient $0 \leq {}^tXAX \leq 1$.

En conclusion $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\det A_k \geq \det A_0$ et $0 \leq {}^tXAX \leq 1$ pour tout X appartenant à K, donc $A \in \mathcal{M}$.

Remarques : α) Cette preuve montre aussi que $\mathcal{M}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A_k \in \mathcal{M}$ pour tout k, et si $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$$

pour tous i, j, donc $a_{ij} = a_{ji}$ en passant à la limite, donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout ce qu'on vient de faire auparavant s'applique : A appartient à $\mathcal{M}$.

β) Cette façon de procéder montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais on ne peut rien dire de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car un passage à la limite dans des inégalités strictes donne des inégalités larges. A la question (II.9) on a par contre démontré que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

III.4.3.d. Il s'agit de montrer que si $A, B \in \mathcal{M}$, alors $[A;B] \subset \mathcal{M}$. Soit $C = tA + (1-t)B$ un point quelconque du segment $[A;B]$ (avec $t \in [0,1]$). Pour montrer que C appartient à $\mathcal{M}$ on doit faire trois vérifications :

• On a vu que $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et l'on a montré que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était convexe (III.3.4.c.i). Donc $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et a fortiori $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• On a $\det A \geq \det A_0$ et $\det B \geq \det A_0$. D'après (III.3.4.c.iii), ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc, si $A \neq B$:

$$\nu(tA + (1-t)B) < t\nu(A) + (1-t)\nu(B).$$

$$\frac{1}{\sqrt{\det C}} < \frac{t}{\sqrt{\det A}} + \frac{1-t}{\sqrt{\det B}} \leq \frac{1}{\sqrt{\det A_0}}$$

d'où $\det C \geq \det A_0$.

• Il s'agit enfin de montrer que $0 \leq {}^tXCX \leq 1$ pour tout $X \in K$. C'est évident puisque :

$${}^tXCX = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX$$

fait apparaître le réel ${}^tXCX$ comme un barycentre à coefficients positifs de deux nombres ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ qui appartiennent à l'intervalle $[0,1]$, ce qui impose d'avoir ${}^tXCX \in [0,1]$.

III.4.4. L'ensemble $\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Soit :

$$v = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\}.$$

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_{A_0}$. On a $A_0 \in \mathcal{M}$, et :

$$\begin{aligned} v &= \mathrm{Inf}\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \leq \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{A_0}) \text{ et } K \subset \mathcal{E}_A\} \\ &= \mathrm{Inf}\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, \det A \leq \det A_0 \text{ et } \forall X \in K \;\; 0 \leq {}^tXAX \leq 1\} \\ &= \mathrm{Inf}\{k_n\nu(A) \,/\, A \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

D'après (III.3.3) et (III.3.4.c) l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & k_n\nu(A) \end{array}$$

est strictement convexe et continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc a fortiori sur $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}$ est une partie non vide, convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après (III.4.3) et la remarque faite après la preuve de (III.4.3). On peut utiliser le résultat de la question (III.2.2) : Ψ admet un minimum et celui-ci est atteint en un unique point de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc une unique matrice $A_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que :

$$v = \mathrm{Inf}\{k_n\nu(A) \,/\, A \in \mathcal{M}\} = k_n\nu(A_1)$$

autrement dit telle que :

$$v = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\} = \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{A_1}).$$

III.4.5.a. L'intérieur de K est l'ensemble vide car toute boule ouverte de centre un point de K et de rayon strictement positif intercepte le complémentaire de K dans $\mathbb{R}^2$.

III.4.5.b. Les intérieurs des ellipses de foyers $F\,(1,0)$, $F'\,(-1,0)$ contiennent le segment $K = [-1,1] \times \{0\}$. Ces ellipses admettent des équations réduites de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $0 < b < a$, dans un repère orthonormal d'origine le milieu de $[FF']$ et de premier axe (FF'). Avec les notations habituelles, c'est-à-dire en notant $(c,0)$ les coordonnées de F, et en supposant (FF') orienté de telle sorte que $c > 0$,

on sait que $a^2 = b^2 + c^2$. Ici $c = 1$, donc l'ellipse, que nous noterons $\mathcal{E}_a$, admet l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1.$$

L'aire de l'intérieur de $\mathcal{E}_a$, que nous noterons abusivement[8] $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_a)$, est :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_a) = \pi ab = \pi a\sqrt{a^2 - 1}$$

donc $\lim_{a \to 1_+} \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_a) = 0$. On peut ainsi trouver des ellipses qui contiennent K, et d'aires aussi petites que l'on désire. Il n'existe pas d'ellipse d'aire minimale contenant K.

6.3 Compléments

6.3.1 Aire de l'intérieur d'une ellipse

L'aire de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal est donnée par l'intégrale double :

$$A = \int\int_D dxdy \qquad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Considérons le changement de variables $\varphi(\rho, \theta) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) = (x, y)$. On a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq 1$$

et le déterminant du jacobien de φ vaut :

$$\det J(\varphi; (\rho, \theta)) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Donc :

$$A = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} ab\rho \, d\theta d\rho = ab \left(\int_{\rho=0}^{1} \rho \, d\rho \right) \times \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) = \pi ab.$$

[8] "Abusivement" non pas parce qu'il s'agit d'une aire et non d'un volume, ce qui provient naturellement du fait que l'on travaille dans un espace de dimension 2, mais parce qu'une ellipse n'a pas d'aire, et que seul l'intérieur d'une ellipse peut en avoir.

6.3.2 Volume d'un ellipsoïde

On peut réviser comment l'on calcule le volume d'un ellipsoïde. L'exercice ci-dessous, extrait du recueil [2] sur les fonctions de plusieurs variables, nous permettra de nous exercer pour la bonne cause !

Exercice 6.1 *(Examen de juin 1997)* ***Volume d'un ellipsoïde***

On se donne trois réels a, b et c strictement positifs.

1) Montrer que l'ensemble $U = \left\{(\rho, \theta, t) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^3$.

2) Soit φ *l'application de* U *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par* :

$$\varphi(\rho, \theta, t) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta, ct).$$

Expliquer sommairement pourquoi φ *est de classe* C^1 *sur* U, *puis écrire la matrice jacobienne* $J(\varphi; (\rho, \theta, t))$ *de* φ *en* $(\rho, \theta, t) \in U$.

3) Soit $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0 \text{ et } x \geq 0\right\}$. *Démontrer que* φ *induit une bijection de* U *sur* $\mathbb{R}^3 \backslash S$.

4) Montrer que la partie :

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

est bornée. En utilisant le changement de variable $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, *calculer le volume de* Ω, *autrement dit la valeur de l'intégrale triple :*

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz.$$

Solution : 1) Les projections $p_1 : (\rho, \theta, t) \mapsto \rho$ et $p_2 : (\rho, \theta, t) \mapsto \theta$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$, de sorte que les images réciproques $p_1^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et $p_2^{-1}(]0, 2\pi[)$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ par ces applications soient des ouverts de $\mathbb{R}^3$. U est ouvert comme l'intersection de ces deux ouverts.

2) φ est de classe C^1 sur U car ses applications coordonnées sont des fonctions de classe C^1 (et même C^∞) sur U. On a

$$J(\varphi; (\rho, \theta, t)) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta & 0 \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3) Il est évident que $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^3 \backslash S$, la seconde coordonnée $b\rho\sin\theta$ de $\varphi(\rho, \theta, t)$ ne pouvant jamais s'annuler lorsque $0 < \theta < 2\pi$ sauf lorsque $x < 0$

(c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi \ (2\pi)$). Pour montrer que $\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \backslash S$ est bijective, il reste à prouver que n'importe quel élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3 \backslash S$ possède un unique antécédent par φ dans U. Puisque $\rho > 0$,

$$\varphi(\rho, \theta, t) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} a\rho\cos\theta = x \\ b\rho\sin\theta = y \\ ct = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{a\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{b\rho} \\ t = \dfrac{z}{c}. \end{cases} \qquad (*)$$

Comme $\left(\frac{x}{a\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\rho}\right)^2 = 1$ il existe un et un seul réel θ appartenant à $[0, 2\pi[$ tel que $\cos\theta = x/a\rho$ et $\sin\theta = y/b\rho$. De plus la condition $y \neq 0$ impose $\theta \neq 0$, d'où $\theta \in]0, 2\pi[$. Les conditions $(*)$ déterminent donc un unique triplet (ρ, θ, t) appartenant à U.

4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a.$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a, \ |y| \leq b, \ |z| \leq c,$$

donc pour tout $(x, y, z) \in \Omega$,

$$\|(x, y, z)\|_\infty = \mathrm{Sup}\,(|x|, |y|, |z|) \leq \mathrm{Sup}\,(a, b, c)$$

et Ω est bornée. Le changement de variable dans l'intégrale donne

$$V = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega'} \left| \frac{D\varphi(x, y, z)}{D(\rho, \theta, t)} \right| d\rho d\theta dt$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega' &= \left\{ (\rho, \theta, t) \in U \,/\, \rho^2 + t^2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (\rho, \theta, t) \in \mathbb{R}^3 \,/ 0 < \rho < \sqrt{1 - t^2},\ 0 < \theta < 2\pi,\ -1 \leq t \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

La valeur absolue du jacobien de φ est

$$\left| \frac{D\varphi(x, y, z)}{D(\rho, \theta, t)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta & 0 \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right| = abc\rho$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$V = \int_{t=-1}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{1-t^2}} abc\rho \, d\rho d\theta dt$$
$$= 2\pi abc \int_{t=-1}^{1} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi abc \int_{t=-1}^{1} 1 - t^2 \, dt = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Remarque : Si Ω est la boule de rayon R, alors $a = b = c = R$ et l'on retrouve la formule classique donnant le volume d'une boule :

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

6.3.3 Norme opérateur d'une matrice symétrique

Voici un extrait adapté du chapitre 24 du "Cours de Géométrie" [5] consacré aux endomorphismes réels symétriques :

Théorème 6.1 *La norme opérateur* $||A|| = \mathrm{Sup}_{X \neq 0} \frac{||AX||}{||X||}$ *d'une matrice carrée réelle symétrique est :*

$$\|A\| = \mathrm{Sup}_{X \neq 0} \frac{\left|{}^tXAX\right|}{{}^tXX} = \mathrm{Sup}\left\{|\lambda| \ / \ \lambda \text{ valeur propre de } A\right\}.$$

Preuve : Notons λ_1, ..., λ_n les valeurs propres de A comptées avec leurs ordres de multiplicité. On peut toujours supposer que $|\lambda_1| = \mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$. La matrice réelle symétrique A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, donc il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Puisque ${}^tP = P^{-1}$, on peut écrire :

$$\frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^tXP^{-1}APX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^t(PX)APX|}{{}^t(PX)(PX)}$$

et de la même manière :

$$\frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^t\left(P^{-1}X\right)DP^{-1}X|}{{}^t(P^{-1}X)(P^{-1}X)}.$$

Cela montre l'égalité ensembliste :

$$\left\{ \frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX} / X \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX} / X \neq 0 \right\}$$

et permet d'affirmer que :

$$\mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX} = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX}.$$

Pour tout vecteur X non nul,

$$\frac{\left|{}^tXDX\right|}{{}^tXX} = \frac{\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right|}{\|X\|^2} \leq |\lambda_1|$$

et $\dfrac{\left|{}^tZDZ\right|}{{}^tZZ} = |\lambda_1|$ pour $Z = {}^t(1, 0, ..., 0)$, donc :

$$\mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{\left|{}^tXDX\right|}{{}^tXX} = |\lambda_1|.$$

Par ailleurs les égalités :

$$\frac{\|DX\|}{\|X\|} = \frac{\left\|P^{-1}APX\right\|}{\|X\|} = \frac{\left\|P^{-1}A(PX)\right\|}{\|PX\|} = \frac{\|A(PX)\|}{\|PX\|}$$

montrent que $||A|| = ||D|| = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \dfrac{||DX||}{||X||}$. Si $X \neq 0$,

$$\frac{\|DX\|}{\|X\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq |\lambda_1|$$

et $\dfrac{||DZ||}{||Z||} = |\lambda_1|$, de sorte que l'on ait bien $||A|| = ||D|| = |\lambda_1|$. ■

Troisième partie

PROBLEMES D'ENTRAINEMENT

Chapitre 7

Endomorphismes cycliques

Ce long problème et son corrigé sont proposés par Jean-Etienne Rombaldi sur un thème repris d'un "sujet zéro" destiné à préparer le CAPES externe 2011. Il permet de bien s'entraîner sur des chapitres d'algèbre linéaire.

7.1 Énoncé

Endomorphismes cycliques et matrices de Frobenius (ou compagnon)

Pour ce problème :
- $\mathbb{K}$ est un corps commutatif ;
- $\mathbb{K}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré au plus égal à n (avec la convention $\deg(0) = -\infty$) ;
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$;
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E ;
- $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E ;
- $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace dual de E ;
- si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est sa base duale ; on rappelle qu'elle est caractérisée par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

- la transposée de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'application ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ définie par :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$$

– l'orthogonal dans E^* d'une partie non vide X de E est l'ensemble :

$$X^{\perp} = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in X,\ \varphi(x) = 0\}$$

– l'orthogonal dans E d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble :

$$Y^{\circ} = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y,\ \varphi(x) = 0\}$$

– $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$;
– $GL_n(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
– Id [resp. I_n] est l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

Pour tout endomorphisme u de E, la sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u est constituée des endomorphismes $v = P(u)$ où P est dans $\mathbb{K}[X]$.

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$ avec la convention $u^0 = Id$.

On note naturellement $\mathbb{K}[u]$ cette algèbre et il est facile de vérifier qu'elle est commutative. Précisément on a :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u).$$

On définit de manière analogue la sous algèbre $\mathbb{K}[A]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ [resp. d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$] est défini par $P_u(X) = \det(XId - u)$ [resp. $P_A(X) = \det(XI_n - A)$] (noter que le polynôme caractéristique est ici unitaire).

Dans ce qui suit, u est un endomorphisme de E.

À tout polynôme unitaire $P(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ de degré $p \geq 1$, on associe sa matrice compagnon définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

Une telle matrice est dite de Frobenius.

Pour $p = 1$, $P(X) = X - a_0$ et $C_P = (a_0)$.

Étude de $\mathbb{K}[u]$. Polynôme minimal

1. Montrer que l'ensemble :
$$I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$
est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul et qu'il existe un unique polynôme unitaire π_u tel que $I_u = \mathbb{K}[X]\pi_u$ (idéal engendré par π_u).
On dit que I_u est l'idéal annulateur de u et π_u est le polynôme minimal de u.
On définit de manière analogue l'idéal annulateur et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Quels sont les endomorphismes de E ayant un polynôme minimal de degré égal à 1 ?
3. Quels sont les valeurs possibles du polynôme minimal d'un projecteur ?
4. Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme nilpotent d'ordre $p \geq 1$ (i. e. tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$).
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme minimal de la restriction de u à F divise celui de u.
6. Montrer que les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.
7. On note p_u le degré de π_u.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un unique $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{p_u-1}) \in \mathbb{K}^{p_u}$ tel que $P(u) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k$.
   (b) Donner une base de $\mathbb{K}[u]$ et préciser sa dimension.
   (c) Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est isomorphe à l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$
8. Soient $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ et C_P sa matrice compagnon. On désigne ici par E l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$, où $(P) = \mathbb{K}[X] \cdot P$ est l'idéal engendré par P.
   (a) Préciser la dimension de E en donnant une base.
   (b) Montrer que C_P est la matrice de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :
$$\forall \overline{R} \in E,\ u\left(\overline{R}\right) = \overline{XR}$$

(c) Montrer que P est le polynôme minimal de u (et de C_P).

(d) Montrer que P est aussi le polynôme caractéristique de u (et de C_P).

(e) Montrer que u (ou C_P) est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$. Donner une expression de u^{-1} qui utilise les coefficients de P dans ce cas. En déduire C_P^{-1}.

(f) On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que le polynôme minimal de u^{-1} (et de C_P^{-1}).est $\dfrac{1}{P(0)} X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Sous-espaces cycliques

Pour tout vecteur non nul x dans E, on note :

$$I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$$

et le sous-espace vectoriel $E_{u,x}$ de E défini par :

$$E_{u,x} = \text{Vect}\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

est appelé sous espace cyclique engendré par x.

1. Montrer que $I_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul et qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $I_{u,x} = \mathbb{K}[X]\pi_{u,x}$. Justifier le fait que $\pi_{u,x}$ divise π_u.
   On dit que $\pi_{u,x}$ est le polynôme minimal de x relativement à u.
   On notera $p_{u,x}$ le degré de $\pi_{u,x}$.
2. Montrer que $E_{u,x}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u. Préciser sa dimension.
3. À quelle condition sur $\dim(E_{u,x})$ le vecteur x est-il vecteur propre de u ?
4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) u est une homothétie ;
   (b) $\dim(E_{u,x}) = 1$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$;
   (c) $\deg(\pi_{u,x}) = 1$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.
5. On désigne par $v_{u,x}$ la restriction de u à $E_{u,x}$ ($E_{u,x}$ est stable par u).
   (a) Montrer qu'il existe une base de $E_{u,x}$ telle que la matrice de $v_{u,x}$ soit la matrice compagnon de $\pi_{u,x}$.

(b) Montrer que $\pi_{u,x}$ est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $v_{u,x}$.

6. Montrer que $P_u(u) = 0$, où P_u désigne le polynôme caractéristique de u (théorème de Cayley-Hamilton).
7. En déduire que le polynôme minimal π_u de u divise le polynôme caractéristique P_u et que $\deg(\pi_u) \leq n$.
8. On suppose ici que le corps $\mathbb{K}$ est infini et on se propose de montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
   (a) Montrer que si $(F_k)_{1\leq k\leq r}$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigcup_{k=1}^{r} F_k$, il existe alors un indice k tel que $E = F_k$.
   (b) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
9. $\mathbb{K}$ est à nouveau un corps commutatif quelconque.
   (a) Soient x, y dans $E \setminus \{0\}$. Montrer que si $E_{u,x} \cap E_{u,y} = \{0\}$, alors $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x} \vee \pi_{u,y}$ (ppcm de $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$).
   (b) Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $x_1, \cdots, x_p$ dans $E \setminus \{0\}$ tels que les sous-espaces cycliques $E_{u,x_1}, \cdots, E_{u,x_p}$ sont en somme directe. Montrer que $\pi_{u,x_1+\cdots+x_p} = \pi_{u,x_1} \vee \cdots \vee \pi_{u,x_p}$.
   (c) Soient $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $x_1, \cdots, x_p$ dans $E\setminus\{0\}$ tels que $\pi_{u,x_1}, \cdots, \pi_{u,x_p}$ sont premiers entre eux. Montrer que $E_{u,x_1+\cdots+x_p} = E_{u,x_1} \oplus \cdots \oplus E_{u,x_p}$.
   (d) On suppose que le polynôme minimal de u est de la forme $\pi_u = P^m$, où P est un polynôme irréductible (unitaire) dans $\mathbb{K}[X]$ et m un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
   (e) Montrer, dans le cas général, qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Endomorphismes cycliques

On dit que l'endomorphisme u est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = E_{u,x}$.

1. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ soit une base de E.
2. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\deg(\pi_{u,x}) = n$.

3. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit une matrice de Frobenius. Préciser le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u dans ce cas.
4. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.
5.
   (a) On suppose que u est diagonalisable et on désigne par $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.
   (b) On suppose que u est cyclique. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il a n valeurs propres distinctes.
6. On suppose ici que $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et on désigne par $(e_k)_{0\leq k\leq n-1}$ la base canonique de E ($e_k(X) = X^k$ pour $0 \leq k \leq n-1$).
   (a) Montrer que l'endomorphisme u défini par $u(P) = P'$ pour tout $P \in E$, où P' est le polynôme dérivé de P, est cyclique et nilpotent d'indice n.
   (b) Montrer que l'endomorphisme u défini par $u(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ pour tout $P \in E$ est cyclique et nilpotent d'indice n.
7. On suppose que u est nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq q-1}$ soit libre (et donc $q \leq n$).
8. On suppose que u est nilpotent. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, son indice de nilpotence vaut n.
9. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$. On suppose de plus qu'il existe un entier $p \geq 3$ tel que $u^p = Id$ et $u^k \neq Id$ pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$ (u est d'ordre p dans $GL(E)$).
   On se fixe une base $\mathcal{B}_0$ de E et on désigne par A_0 la matrice de u dans $\mathcal{B}_0$.
   (a) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que A_0 n'a pas de valeurs propres réelles. Précisément, vérifier que ses valeurs propres complexes sont $\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ et $\overline{\lambda} = e^{-\frac{2ik\pi}{p}}$, où k est un entier compris entre 1 et $p-1$ premier avec p.
   (c) Montrer que, pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, la famille $(x, u(x))$ est une base de E (et u est cyclique).

(d) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x))$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$$

10. Soient u un endomorphisme cyclique et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (s'il en existe) Montrer que l'espace propre associé est de dimension 1 et donner un générateur de cet espace propre en fonction des coefficients du polynôme caractéristique (ou minimal) de u.

Décomposition de Frobenius

1. Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et son transposé ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ ont même idéal annulateur et même polynôme minimal.
2. Soient u un endomorphisme de E, $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$ et $p = p_{u,x}$ le degré de $\pi_{u,x}$. On complète la base $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ de $E_{u,x}$ en une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E, en notant $e_k = u^{k-1}(x)$ pour k compris entre 1 et p. On définit la famille $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq p}$ de formes linéaires par :

$$\varphi_k = \left({}^t u\right)^{k-1}\left(e_p^*\right) \ (1 \leq k \leq p)$$

et G est le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq p}$.

(a) Montrer que $\dim(G) = p$.

(b) Montrer que $E = E_{u,x} \oplus G^\circ$.

(c) Montrer que G est stable par ${}^t u$ et que G° est stable par u.

(d) On suppose que $n = \dim(E) \geq 2$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F_r \end{pmatrix}$$

où les F_k sont des matrices de Frobenius.

Commutant d'un endomorphisme

Le commutant de $u \in \mathcal{L}(E)$ est le sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[u]$.
2. On suppose que u est diagonalisable avec des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. Montrer que :
$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2.$$
3. Montrer que si u est cyclique, on a alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$ et $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$.
4. Montrer que $n \leq \dim(\mathcal{C}(u)) \leq n^2$.
5. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

7.2 Corrigé

Étude de $\mathbb{K}[u]$. Polynôme minimal

1. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension n^2, la famille
$$\left\{u^k \mid 0 \leq k \leq n^2\right\}$$
est liée et en conséquence, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(u) = 0$. Il en résulte que l'ensemble I_u n'est pas réduit au polynôme nul. Cet ensemble étant le noyau du morphisme d'algèbres $\varphi_u : P \mapsto P(u)$, c'est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ et comme cet anneau est principal, il existe un unique polynôme unitaire π_u tel que $I_u = \mathbb{K}[X]\pi_u$. Ce polynôme est de degré au moins égal à 1.
2. Dire que π_u est de degré 1 équivaut à dire qu'il existe un scalaire λ tel que $\pi_u(X) = X - \lambda$ et l'égalité $\pi_u(u) = 0$ équivaut à $u = \lambda Id$, ce qui revient à dire que u est une homothétie.
3. On rappelle qu'un projecteur est un endomorphisme u de E tel que $u \circ u = u$.
Un tel projecteur étant annulé par $X(X-1)$, son polynôme minimal est $\pi_u(X) = X$ si $u = 0$, $\pi_u(X) = X - 1$ si $u = Id$, $\pi_u(X) = X^2 - X$ dans les autres cas.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $p \geq 1$. Comme u est annulé par X^p, son polynôme minimal est un diviseur de ce polynôme, donc de la forme X^r avec $1 \leq r \leq p$. Comme $u^k \neq 0$ pour tout k compris entre 1 et $p-1$ (sinon $u^{p-1} = 0$), ce polynôme minimal est X^p.

5. Notons v la restriction de u à F. C'est un endomorphisme de F si F est stable par u. De $\pi_u(u) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$, on déduit que $\pi_u(v) = 0$ dans $\mathcal{L}(F)$, donc π_u est dans l'idéal annulateur de v et c'est un multiple du polynôme minimal de v.
6. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, de l'égalité :
$$0 = \pi_u(u)(x) = \pi_u(\lambda)\, x$$
on déduit que $\pi_u(\lambda) = 0$, c'est-à-dire que λ est racine de π_u.
Réciproquement si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de π_u, on a $\pi_u(X) = (X - \lambda) Q(X)$ et avec $\pi_u(u) = (u - \lambda Id) \circ Q(u) = 0$ et le caractère minimal de π_u on déduit que $u - \lambda Id$ est non inversible ce qui équivaut à dire que $\ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$ et λ est une valeur propre de u.
7.
   (a) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a la division euclidienne $P = \pi_u Q + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{p_u-1}[X]$ et compte tenu de $\pi_u(u) = 0$, on a $P(u) = R(u) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k$ si $R(X) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k X^k$.
   Si R, S sont deux polynômes dans $\mathbb{K}_{p_u-1}[X]$ tels que $P(u) = R(u) = S(u)$, on a alors $(R - S)(u) = 0$ et π_u divise $R - S$, ce qui impose $R - S = 0$ du fait que $\deg(R - S) < \deg(\pi_u)$. Les coefficients α_k, pour k compris entre 0 et $p_u - 1$ sont donc uniquement déterminés.
   (b) L'écriture $P(u) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k$ avec les coefficients α_k, pour k compris entre 0 et $p_u - 1$, uniquement déterminés, pour tout $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ nous dit que la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq p_u-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et cet espace est de dimension égale à p_u.
   (c) On peut aussi procéder comme suit : le morphisme d'algèbres $\varphi_u : P \mapsto P(u)$ est surjectif de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$ de noyau $I_u = \mathbb{K}[X]\pi_u = (\pi_u)$ (idéal engendré par π_u), il induit donc un isomorphisme d'algèbres de $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$ sur $\mathbb{K}[u]$, donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \dim\left(\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}\right) = p_u$ (en utilisant le théorème de division euclidienne).
8.
   (a) Par division euclidienne, tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $A = PQ + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\overline{P} = \overline{R} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \overline{X^k}$, donc $\left(\overline{X^k}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$

est une famille génératrice de E. Dire que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \overline{X^k} = \overline{0}$ dans E équivaut à dire que $R = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est multiple de P, donc nul à cause des degré, ce qui revient à dire que tous les α_k sont nuls. La famille $\mathcal{B} = \left(\overline{X^k}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est donc une base de E et $\dim(E) = n = \deg(P)$.

(b) Avec $u\left(\overline{X^k}\right) = \overline{X^{k+1}}$ pour $0 \leq k \leq n-2$ et :

$$u\left(\overline{X^{n-1}}\right) = \overline{X^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{X^k}$$

(qui résulte de $\overline{P} = \overline{0}$), on voit que C_P est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Notons $e_k = \overline{X^{k-1}}$ pour k compris entre 1 et n. On a alors $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $u(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$, soit $e_k = u^{k-1}(e_1)$ pour $1 \leq k \leq n$ et :

$$\left(u^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)(e_1) = 0$$

$$\left(u^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)(e_j) = u^{j-1}\left(\left(u^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)(e_1)\right) = 0$$

pour $1 \leq j \leq n$, ce qui signifie que u est annulé par $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Le polynôme π_u divise donc P. Si π_u est de degré $p < n$, alors u^p est combinaison linéaire de $Id, u, \cdots, u^{p-1}$, donc $e_{p+1} = u^p(e_1)$ est combinaison linéaire de $e_1, e_2, \cdots, e_p$, ce qui n'est pas. On a donc $p = n$ et $\pi_u = P$.

(d) Si on connaît le théorème de Cayley-Hamilton (démontré plus loin), on peut dire que π_u est unitaire de degré n divisant le polynôme caractéristique lui aussi unitaire de degré n, donc ces polynômes sont égaux.
Si on veut se passer du théorème de Cayley-Hamilton, on peut calculer directement $P_u = P_{C_P}$.

En notant $P_{(a_0,\cdots,a_{n-1})}(X) = \det(XI_n - C_P)$ le polynôme caractéristique de C_P et en le développant par rapport à la première ligne, on a :

$$P_{(a_0,\cdots,a_{n-1})}(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= X \cdot P_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}(X) - a_0$$

et par récurrence $P_{(a_0,\cdots,a_{n-1})}(X) = X^p - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = P(X)$.

Un polynôme unitaire est donc polynôme minimal et polynôme caractéristique de sa matrice compagnon.

(e) L'endomorphisme u est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de u, ce qui équivaut à dire que 0 n'est pas racine de $\pi_u = P$, encore équivalent à $P(0) \neq 0$.

De $P(u) = u^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$ avec $a_0 = P(0) \neq 0$, on déduit que :

$$u\left(u^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}\right) = a_0 Id$$

et :

$$u^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(u^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}\right)$$

est un polynôme en u.

Il en résulte que :

$$u^{-1}(e_1) = \frac{1}{a_0}\left(e_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\right)$$

et avec $u^{-1}(e_k) = u^{-1}(u(e_{k-1})) = e_{k-1}$ pour k compris entre 2 et n, on déduit que la matrice de u^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ (à savoir C_P^{-1}) est :

$$C_P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui peut se vérifier aussi par un calcul direct.

(f) Comme $P(0) \neq 0$, l'endomorphisme u est inversible.
De :

$$P(u) = u^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$$

on déduit, en multipliant par $\left(u^{-1}\right)^n$ que :

$$Id - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(u^{-1}\right)^{n-k} = 0$$

donc u^{-1} est annulé par $Q(X) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k}$, ce polynôme étant de degré n puisque $a_0 \neq 0$. Donc $\pi_{u^{-1}}$ divise Q et il est de degré au plus n (ce qui est connu comme conséquence du théorème de Cayley-Hamilton). Si $\pi_{u^{-1}}$ est de degré $q < n$, on a une relation du type $\left(u^{-1}\right)^q - \sum_{k=0}^{q-1} b_k \left(u^{-1}\right)^k = 0$ et multipliant par u^q, cela donne $Id - \sum_{k=0}^{q-1} b_k u^{q-k} = 0$ qui contredit $\deg(\pi_u) = n$. Le polynôme $\pi_{u^{-1}}$ est donc de degré n et proportionnel à Q. Comme il est unitaire, on a $\pi_{u^{-1}} = \frac{1}{a_0} Q$, soit $\pi_{u^{-1}}(X) = \frac{1}{P(0)} X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Sous-espaces cycliques

1. Comme E est de dimension n, le système $\left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n}$ est lié, ce qui se traduit par l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$. On a donc $I_{u,x} \neq \{0\}$ (on peut aussi dire que $\{0\} \neq I_u \subset I_{u,x}$). Et pour P, Q dans $I_{u,x}$ et R dans $\mathbb{K}[X]$, on a $(P-Q)(u)(x) = P(u)(x) - Q(u)(x) = 0$ et $(PR)(u)(x) = R(u)(P(u)(x)) = 0$, donc $P-Q$ et PR sont dans $I_{u,x}$, ce qui signifie que $I_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant principal, il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x}$ tel que $I_{u,x} = \mathbb{K}[X]\pi_{u,x}$. Ce polynôme est de degré compris entre 1 et n (il est non constant et divise $P \in \mathbb{K}_n[X]$). Comme $I_u = \mathbb{K}[X]\pi_u \subset I_{u,x} = \mathbb{K}[X]\pi_{u,x}$, le polynôme $\pi_{u,x}$ divise π_u.
2. Il est clair que $E_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient x.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u\left(u^k(x)\right) = u^{k+1}(x) \in E_{u,x}$, donc $E_{u,x}$ est stable par u.
Si F est sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u, on a alors $u(x) \in F$ et on vérifie par récurrence que $u^k(x) \in F$ pour tout

entier $k \geq 0$, donc F contient $E_{u,x}$.
Comme $\pi_{u,x}$ est de degré minimum dans $I_{u,x} \setminus \{0\}$, le système $\mathcal{B}_{u,x} = \left\{u^k(x) \mid 0 \leq k \leq p_{u,x}-1\right\}$ est libre.
En notant $\pi_{u,x}(X) = X^{p_{u,x}} - \sum_{k=0}^{p_{u,x}-1} a_k X^k$, de $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$, on déduit que $u^{p_{u,x}}(x)$ est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ et par récurrence sur $k \geq 0$, on vérifie que $u^{p_{u,x}+k}(x) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ pour tout entier naturel k, ce qui signifie que $\mathcal{B}_{u,x}$ est un système générateur et donc une base de $E_{u,x}$.
On a donc $\dim(E_{u,x}) = p_{u,x}$.
On peut aussi dire que tout élément de $E_{u,x}$ est de la forme $P(u)(x)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. Par division euclidienne, on $P = \pi_{u,x}Q + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{p_{u,x}-1}[X]$ et $P(u) = R(u) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k$, un tel polynôme R étant uniquement déterminé, ce qui signifie que $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq p_{u,x}-1}$ est une base de $E_{u,x}$.
Donc $\dim(E_{u,x}) = p_{u,x} = \deg(\pi_{u,x})$

3. Si x est vecteur propre de u, il existe alors un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout entier $k \geq 0$ et $E_{u,x}$ est la droite vectorielle dirigée par x, donc $\dim(E_{u,x}) = 1$ et $\pi_{u,x}$ est de degré 1.
Réciproquement si $E_{u,x}$ est de dimension 1, c'est la droite vectorielle dirigée par x (ce vecteur est non nul dans $E_{u,x}$) et en particulier il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que x est un vecteur propre de u.

4. Si u est une homothétie, tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u, donc $\dim(E_{u,x}) = \deg(\pi_{u,x}) = 1$.
Si $\deg(\pi_{u,x}) = 1$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a alors $\dim(E_{u,x}) = 1$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, donc tout vecteur non nul est propre. Si x, y sont deux vecteurs linéairement indépendants, il existe alors deux scalaires λ, μ tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, donc $u(x+y) = \lambda x + \mu y$ est colinéaire à $x+y$ (ce vecteur est vecteur propre non nul de u) et il existe un scalaire ν tel que $\lambda x + \mu y = \nu(x+y)$, ce qui entraîne $\lambda = \nu = \mu$. Il en résulte que u est une homothétie. D'où l'équivalence des trois assertions.

5.

   (a) Avec $\pi_{u,x}(u)(x) = u^{p_{u,x}}(x) - \sum_{k=0}^{p_{u,x}-1} a_k u^k(x) = 0$, on déduit que $u^{p_{u,x}}(x) = \sum_{k=0}^{p_{u,x}-1} a_k u^k(x)$ et la matrice de $v_{u,x}$ dans la base $\mathcal{B}_{u,x}$ de

$E_{u,x}$ est :

$$A_{u,x} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{p_{u,x}-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice compagnon de $\pi_{u,x}$.

(b) Le polynôme minimal [resp. caractéristique] de la restriction de u à E_x est celui de la matrice compagnon $A_{u,x}$ de $\pi_{u,x}$, soit $\pi_{u,x}$.

6. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ le sous espace cyclique $E_{u,x}$ étant stable par u, le polynôme caractéristique $\pi_{u,x}$ de $u_{|E_{u,x}}$ divise celui de u (facile à vérifier avec les matrices). C'est-à-dire que $P_u = Q_x \cdot \pi_{u,x}$ et $P_u(u)(x) = Q_x(u) \circ \pi_{u,x}(u)(x) = 0$, ce dernier résultat étant encore valable pour $x = 0$.
On a donc $P_u(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, soit $P_u(u) = 0$.

7. Le polynôme minimal divisant tout polynôme annulateur de u, on déduit du théorème de Cayley-Hamilton que π_u divise le polynôme P_u et $\deg(\pi_u) \leq \deg(P_u) = n$. L'égalité $\deg(\pi_u) = n$ équivaut à dire que $\pi_u = P_u$.

8.

(a) On procède par récurrence sur $r \geq 1$, le résultat étant évident pour $r = 1$.
Supposons le acquis jusqu'au rang $r \geq 1$ et soit $E = \bigcup_{k=1}^{r+1} F_k$, les F_k étant des sous-espaces vectoriels de E.
Si $F_{r+1} \subset \bigcup_{j=1}^{r} F_j$, on a alors $E = \bigcup_{j=1}^{r} F_j$ et c'est terminé avec l'hypothèse de récurrence.
Si $\bigcup_{j=1}^{r} F_j \subset F_{r+1}$, on a alors $E = F_{r+1}$ et c'est terminé de manière triviale.
Si aucune des hypothèses précédentes n'est vérifiée, il existe un vecteur $x \in F_{r+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{r} F_k$ et un vecteur $y \in \bigcup_{k=1}^{r} F_k \setminus F_{r+1}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le vecteur $y + \lambda x$ ne peut être dans F_{r+1} (si $y + \lambda x \in F_{r+1}$, on a alors $y = (y + \lambda x) - \lambda x \in F_{r+1}$ ce qui n'est pas), il est donc dans $\bigcup_{k=1}^{r} F_k$ et il existe un indice k_λ compris entre 1 et r tel que $y + \lambda x \in$

F_{k_λ}. Pour $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{K}$, l'égalité $k_\lambda = k_\mu$ entraîne $y + \lambda x \in F_{k_\lambda}$ et $y + \mu x \in F_{k_\mu} = F_{k_\lambda}$, donc $x = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(y + \lambda x - (y + \mu x)) \in F_{k_\lambda}$, soit $x \in \bigcup_{k=1}^{r} F_k$, ce qui n'est pas. On a donc $k_\lambda \neq k_\mu$ pour $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{K}$ et l'ensemble $\{k_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est infini contenu dans $\{1, \cdots, r\}$, ce qui est impossible.
Pour $\mathbb{K}$ fini de cardinal inférieur ou égal à r, il n'y a pas d'impossibilité. Dans ce cas, $\mathbb{K} = \bigcup_{k=1}^{q-1} \mathbb{K}x_k$ où $\mathbb{K}$ est de cardinal q et les x_k sont tous les éléments non nuls de $\mathbb{K}$.

(b) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ le polynôme $\pi_{u,x}$ divise π_u puisque $\pi_u \in I_{u,x}$, donc :

$$\Phi = \{\pi_{u,x} \mid x \in E\} \subset \{\text{diviseurs unitaires de } \pi_u\}$$

et cet ensemble est fini. Notons $\Phi = \{\pi_{u,x_k} \mid 1 \leq k \leq r\}$. On a alors :

$$E = \bigcup_{k=1}^{r} \ker\left(\pi_{u,x_k}(u)\right)$$

et il existe un indice k compris entre 1 et r tel que $E = \ker\left(\pi_{u,x_k}(u)\right)$. Il en résulte que $\pi_{u,x_k} = \pi_u$ puisque π_{u,x_k} est un polynôme unitaire qui annule u et qui divise π_u.

9.

(a) Pour tout $P \in I_{u,x+y}$, on a $P(u)(x+y) = 0$, donc $P(u)(x) = -P(u)(y) \in E_{u,x} \cap E_{u,y}$ et $P(u)(x) = P(u)(y) = 0$ puisque cette intersection est réduite au vecteur non, ce qui nous dit que $P \in I_{u,x} \cap I_{u,y}$. On a donc $I_{u,x+y} \subset I_{u,x} \cap I_{u,y}$. Réciproquement si $P \in I_{u,x} \cap I_{u,y}$, on a $P(u)(x) = P(u)(y) = 0$ et $P(u)(x+y) = 0$, soit $P \in I_{u,x+y}$.
En définitive, on a $I_{u,x+y} = I_{u,x} \cap I_{u,y}$ avec $I_{u,x+y} = \mathbb{K}[X]\,\pi_{u,x+y}$ et $I_{u,x} \cap I_{u,y} = \mathbb{K}[X](\pi_{u,x} \vee \pi_{u,y})$ (par définition du ppcm), ce qui revient à dire que $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x} \vee \pi_{u,y}$ puisque ces polynômes sont unitaires.

(b) Si $P \in I_{u,x_1+\cdots+x_p}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} P(u)(x_k) = P(u)\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = 0$$

donc $P(u)(x_k) = 0$ pour tout k puisque $P(u)(x_k) \in E_{u,x_k}$ et ces sous-espaces sont en somme directe, ce qui nous dit que $P \in \bigcap_{k=1}^{p} I_{u,x_k}$. On a donc $I_{u,x_1+\cdots+x_p} \subset \bigcap_{k=1}^{p} I_{u,x_k}$. Réciproquement si $P \in \bigcap_{k=1}^{p} I_{u,x_k}$, on a $P(u)(x_k) = 0$ pour tout k et $P(u)\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = 0$, soit $P \in I_{u,x_1+\cdots+x_p}$.

En définitive, on a $I_{u,x_1+\cdots+x_p} = \bigcap_{k=1}^{p} I_{u,x_k}$ et $\pi_{u,x_1+\cdots+x_p} = \pi_{u,x_1} \vee \cdots \vee \pi_{u,x_p}$.

(c) On vérifie facilement que pour tous vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ dans $E\backslash\{0\}$, on a :

$$E_{u,x_1+\cdots+x_p} \subset \sum_{k=1}^{p} E_{u,x_k}$$

Soit $(y_k)_{1\leq k\leq p}$ une suite de vecteurs telle que $y_k = P_k(u)(x_k) \in E_{u,x_k}$ et $y = \sum_{k=1}^{p} y_k = 0$. En notant $Q_j = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \pi_{u,x_k}$ pour $1 \leq j \leq p$, on a :

$$0 = P_j(u)(y) = \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(Q_j(u)(x_k)) = (P_j Q_j)(u)(x_j)$$

et π_{u,x_j} va diviser $P_j Q_j$ en étant premier avec Q_j puisque les π_{u,x_k} sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de Gauss nous dit alors que π_{u,x_j} divise P_j et $y_j = P_j(u)(x_j) = 0$. On a donc $\sum_{k=1}^{p} E_{u,x_k} = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{u,x_k}$ et avec la question précédente, on déduit que :

$$\pi_{u,x_1+\cdots+x_p} = \pi_{u,x_1} \vee \cdots \vee \pi_{u,x_p} = \pi_{u,x_1} \cdot \cdots \cdot \pi_{u,x_p}$$

et :

$$\begin{aligned}\dim\left(E_{u,x_1+\cdots+x_p}\right) &= \deg\left(\pi_{u,x_1+\cdots+x_p}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p} \deg\left(\pi_{u,x_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim\left(E_{u,x_k}\right)\\ &= \dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{u,x_k}\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'égalité $E_{u,x_1+\cdots+x_p} = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{u,x_k}$.

(d) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $P^m(u)(x) = 0$, donc $\pi_{u,x}$ divise P^m et il existe un entier m_x compris entre 1 et m tel que $\pi_{u,x} = P^{m_x}$. Si $m = 1$, on a alors $\pi_{u,x} = P = \pi_u$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et c'est terminé.
Si $m \geq 2$ et tous les m_x sont strictement inférieur à m, l'ensemble $\{m_x \mid x \in E \setminus \{0\}\}$ étant contenu dans $\{1, \cdots, m-1\}$ admet un plus grand élément r compris entre 1 et $m-1$, mais alors $P^r(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $\pi_u = P^m$ ne peut être le polynôme minimal de u. Il existe donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_{u,x} = P^m = \pi_u$.

(e) Dans le cas général, on a la décomposition en facteurs premiers unitaires $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{m_k}$ et le théorème de décomposition des noyaux nous dit que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, où les espaces $F_k = \ker\left(P_k^{m_k}(u)\right)$ sont stables par u, le polynôme minimal de la restriction de u à F_k étant $P_k^{m_k}$ (facile à vérifier). De la question précédente, on déduit que pour tout entier k compris entre 1 et r, il existe un vecteur $x_k \in F_k \setminus \{0\}$ tel que $\pi_{u_{|F_k},x_k} = \pi_{u_{|F_k}} = P_k^{m_k}$. De $P_k^{m_k}(u)(x_k) = 0$, on déduit que π_{u,x_k} divise $P_k^{m_k}$ et de $\pi_{u,x_k}\left(u_{|F_k}\right)(x_k) = 0$, on déduit que $P_k^{m_k}$ divise π_{u,x_k}, donc $\pi_{u,x_k} = P_k^{m_k}$.
Enfin comme les $\pi_{u,x_k} = P_k^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux, en notant $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$, on a $x \neq 0$ et $E_{u,x} = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{u,x_k}$, ce qui entraîne :

$$\pi_{u,x} = \pi_{u,x_1} \vee \cdots \vee \pi_{u,x_p} = \prod_{k=1}^{p} P_k^{m_k} = \pi_u$$

Endomorphismes cycliques

1. Si $\mathcal{B}_{u,x}$ est une base de E, on a alors $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x}) \subset E_{u,x}$, donc $E = E_{u,x}$ et u est cyclique.
Réciproquement, soit u est cyclique et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = E_{u,x}$. Si la famille $\mathcal{B}_{u,x}$ est liée, il existe un entier p compris entre 1 et $n-1$ tel que

$u^p(x)$ soit combinaison linéaire de $x, \cdots, u^{p-1}(x)$ et en procédant par récurrence, on en déduit facilement que pour tout entier $k \geq p$, $u^k(x)$ est combinaison linéaire de $x, \cdots, u^{p-1}(x)$, ce qui entraîne que :

$$E_{u,x} = \text{Vect}\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\} \subset \text{Vect}\left\{u^k(x) \mid 0 \leq k \leq p-1\right\}$$

et $\dim(E_{u,x}) \leq p < n$, en contradiction avec $E = E_{u,x}$. La famille $\mathcal{B}_{u,x}$ est donc libre et c'est une base de E.

2. Si u est cyclique, il existe alors un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ soit une base de E et $\deg(\pi_{u,x}) = n$ (si $\deg(\pi_{u,x}) = p < n$, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq p}$ est alors liée).
   S'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\deg(\pi_{u,x}) = n$, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est nécessairement libre (sinon on a un élément non nul de $I_{u,x}$ de degré strictement inférieur à n) et c'est une base de E, donc u est cyclique.

3. Soient u cyclique et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ soit une base de E. En écrivant que $u^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$, on voit que la matrice de u dans cette base est la matrice de Frobenius :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   C'est la matrice compagnon de $P(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ qui est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.
   Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans laquelle la matrice de u soit une matrice de Frobenius F. En notant $x = e_1$, on a $u^k(x) = e_{k+1}$ pour k compris entre 0 et $n-1$ et $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de E. Donc u est cyclique.

4. Supposons que $P_u = \pi_u$. Si $x \in E\setminus\{0\}$ est tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$, ce polynôme $\pi_{u,x}$ est alors de degré n et la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est nécessairement libre, c'est donc une base et u est cyclique.
   Avec la question précédente, on a vu que la condition est nécessaire.
   On peut aussi dire que si u est cyclique, alors $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de E et le polynôme minimal π_u ne peut être de degré $p \leq n-1$, sinon la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq p}$ serait liée, il est donc de degré n et égal à P_u puisqu'il le divise et est unitaire comme P_u.

5.

(a) Si u est cyclique, on a alors $P_u = \pi_u$ avec $\pi_u(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ (les valeurs propres de u sont les racines de π_u et u est diagonalisable si, et seulement si, π_u est scindé à racines simples), ce qui impose $p = n$.
Si u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes, son polynôme minimal est alors unitaire, de degré n et divisant le polynôme minimal P_u lui aussi unitaire de degré n, donc $\pi_u = P_u$ et u est cyclique.

(b) Pour u cyclique, on a $\pi_u = P_u$. Si u est diagonalisable, π_u est alors scindé à racines simples et comme il est de degré n, on en déduit que u a n valeurs propres distinctes.
Si u a n valeurs propres distinctes, il est alors diagonalisable (cyclique ou pas).

6.

(a) Pour tout $P \in E$, on a $u^n(P) = P^{(n)} = 0$, donc u est nilpotent.
Avec $u^0(e_{n-1}) = e_{n-1}$ et :

$$\begin{aligned} u^k(e_{n-1}) &= \left(X^{n-1}\right)^{(k)} \\ &= (n-1)\cdots(n-k)\,X^{n-1-k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}e_{n-1-k} \end{aligned}$$

pour $k \in \{1, ..., n\}$, on déduit que la famille $\left(u^k(e_{n-1})\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de E et $E = E_{u,e_{n-1}}$, donc u est cyclique.
Avec $u^{n-1}(e_{n-1}) = (n-1)!e_0 \neq 0$, on déduit que u est nilpotent d'indice n.

(b) Si P est un polynôme constant, on a $u(P) = 0$ et si P est de degré $p \geq 1$, on a $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$, le coefficient dominant de $u(P)$ étant pa_p en désignant par a_p celui de P, donc

$$\deg(u^n(P)) \leq \deg(P) - n < 0$$

et $u^n(P) = 0$, c'est-à-dire que u est nilpotent.
Avec $\deg\left(u^k(e_{n-1})\right) = n - 1 - k$, on déduit que la famille

$$(u^k(e_{n-1}))_{0\leq k\leq n-1}$$

est échelonnée en degré et c'est une base de E, donc u est cyclique.
Avec $\deg\left(u^{n-2}(e_{n-1})\right) = 1$, on déduit que $u^{n-2}(e_{n-1}) = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $u^{n-1}(e_{n-1}) = a \neq 0$, donc u est nilpotent d'indice n.

7. Comme $u^{q-1} \neq 0$, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$.
Si $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$, on a alors :

$$0 = u^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$$

($u^{q+k} = 0$ pour $k \geq 0$) et $\lambda_0 = 0$. Si $q = 1$, c'est fini, sinon en supposant que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ pour $0 \leq j \leq q-2$, on a $\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ et, en appliquant u^{q-2-j} à cette dernière égalité, on obtient $\lambda_{j+1} u^{q-1}(x) = 0$ et $\lambda_{j+1} = 0$. D'où le résultat.

8. Soit u nilpotent d'ordre q et cyclique. Il existe $x \in E$ tel que

$$\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$$

soit une base de E et en particulier $u^{n-1}(x) \neq 0$, donc $q = n$.
Réciproquement soit u nilpotent d'ordre n. La famille

$$\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$$

est alors une base de E et u est cyclique.

9.

   (a) La matrice A_0 étant annulée par le polynôme $X^p - 1$ qui est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, est diagonalisable, ses valeurs propres étant des racines p-ème de l'unité.

   (b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A_0, alors λ^p est valeur propre de $A_0^p = I_2$, donc $\lambda^p = 1$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$. Comme on est en dimension 2, A_0 a une deuxième valeur propre réelle qui est aussi dans $\{-1, 1\}$. Cette matrice étant diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on en déduit que $A_0^2 = I_2$, ce qui n'est pas ($A_0^k \neq I_2$ pour $1 \leq k \leq p-1$ avec $p-1 \geq 2$). Donc les valeurs propres complexes de A_0 sont non réelles.
   Les valeurs propres complexes de A_0 sont donc $\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ et $\overline{\lambda} = e^{-\frac{2ik\pi}{p}}$ (elles sont conjuguées puisque A_0 est réelles et racines p-èmes de l'unité puisque $A_0^p = I_2$) où k est un entier compris entre 1 et $p-1$. Comme A_0 est d'ordre p, il en est de même de λ dans $\mathbb{C}^*$ et k est premier avec p, ce qui peut se montrer comme suit : en notant $\delta = k \wedge p$, on a $p = \delta p'$, $k = \delta k'$ et $\lambda^{p'} = \left(e^{\frac{2ik'\pi}{p'}}\right)^{p'} = e^{2ik'\pi} = 1$, $\overline{\lambda}^{p'}$, donc $A_0^{p'} = I_2$ avec $1 \leq p' \leq p-1$ si $\delta \neq 1$, ce qui contredit le fait que A_0 est d'ordre p, donc $\delta = 1$.

(c) Dire que la famille $(x, u(x))$ est liée équivaut à dire qu'il existe un réel λ tel que $u(x) = \lambda$, ce qui contredit le fait que A_0 n'a pas de valeurs propres réelles. Cette famille est donc libre et c'est une base de E.

(d) On sait déjà que la matrice de u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique de u est :

$$\begin{aligned} P_u(X) &= P_A(X) \\ &= X^2 - a_1 X - a_0 \\ &= P_{A_0}(X) \\ &= X^2 - \operatorname{Tr}(A_0) + \det(A_0) \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$a_1 = \operatorname{Tr}(A_0) = \lambda + \overline{\lambda} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$$

et :

$$a_0 = -\det(A_0) = -\lambda \cdot \overline{\lambda} = -1$$

10. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

où $P(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est le polynôme caractéristique et minimal de u. La matrice :

$$\lambda I_n - F = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_{p-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 1 puisque $\det(\lambda I_n - F) = 0$ et le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ extraite en supprimant la première ligne et la dernière

colonne vaut $(-1)^{n-1} \neq 0$, donc l'espace propre $\ker(\lambda Id - u)$ est de dimension 1.
Cet espace propre s'obtient en résolvant le système $FX = \lambda X$, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \lambda x_1 - a_0 x_n = 0 \\ -x_{k-1} + \lambda x_k - a_{k-1} x_n = 0 \ (2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2} x_n = \left(\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}\right) x_n \\ x_{n-3} = \lambda x_{n-2} - a_{n-3} x_n = \left(\lambda^3 - a_{n-1}\lambda^2 - a_{n-2}\lambda - a_{n-3}\right) x_n \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n = \left(\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_2\lambda - a_1\right) x_n \end{cases}$$

la première équation se traduisant par $P(\lambda) x_n = 0$. Prenant $x_n = 1$, un générateur de $\ker(\lambda Id - u)$ est le vecteur x dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\left(\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1, \cdots, \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}, \lambda - a_{n-1}, 1\right)$$

Décomposition de Frobenius

1. Pour tout entier $k \geq 0$, on a $\left({}^t u\right)^k = {}^t u^k$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\left({}^t u\right) = {}^t\left(P(u)\right)$, donc $P\left({}^t u\right) = 0$ si, et seulement, $P(u) = 0$ et $I_{{}^t u} = I_u$, $\pi_{{}^t u} = \pi_u$.
2.
   (a) Supposons qu'il existe des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k = 0$. En désignant par r le plus grand indice compris entre 1 et p tel que $\lambda_r \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k \left(u^{p-r}(x)\right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_p^* \left(u^{k-1}\left(u^{p-r}(x)\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_p^* \left(u^{p-r+k-1}(x)\right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_p^*(e_{p-r+k}) = \lambda_r \end{aligned}$$

   ce qui est contradictoire. La famille $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq p}$ est donc libre dans E^* et $\dim(G) = p$.

(b) On a $\dim(E_{u,x}) = \deg(\pi_{u,x}) = p$ et $\dim(G^\circ) = n - \dim(G) = n - p$. Si $y \in E_{u,x} \cap G^\circ$, on $y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ et pour tout j compris entre 1 et p :

$$0 = \varphi_j(y) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_j(e_k)$$

Ce qui nous donne :

$$\varphi_1(e_k) = e_p^*(e_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1 \leq k \leq p-1 \\ 1 \text{ si } k = p \end{cases} \Rightarrow \lambda_k = 0$$

$$\varphi_2(e_k) = e_p^*(u(e_k)) = e_p^*(e_{k+1}) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1 \leq k \leq p-2 \\ 1 \text{ si } k = p-1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{p-1} = 0$$

et continuant ainsi de suite, on arrive à $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
On a donc $E_{u,x} \cap G^\circ = \{0\}$ et $E = E_{u,x} \oplus G^\circ$.

(c) Pour k compris entre 1 et $p-1$, on a :

$${}^t u(\varphi_k) = \left({}^t u\right)^k \left(e_p^*\right) = \varphi_{k+1}$$

et pour $k = p$:

$${}^t u\left(\varphi_p\right) = \left({}^t u\right)^p \left(e_p^*\right) = e_p^* \circ u^p$$

avec u^p combinaison linéaire de $Id, u, \cdots, u^{p-1}$ (p est le degré du polynôme minimal), donc $e_p^* \circ u^p$ est combinaison linéaire de $e_p^* \circ Id = \varphi_1, e_p^* \circ u = \varphi_2, \cdots, e_p^* \circ u^{p-1} = \varphi_p$, c'est-à-dire que ${}^t u\left(\varphi_p\right) \in G$. L'espace G est donc stable par ${}^t u$.

(d) Pour $y \in G^\circ$ et $\varphi \in G$, on a $\varphi(y) = 0$ et $\varphi(u(y)) = \left({}^t u\right)(\varphi)(y) = 0$ puisque G est donc stable par ${}^t u$, donc $u(y) \in G^\circ$ et G° est stable par u.

(e) On procède par récurrence sur $n = \dim(E) \geq 1$.
Pour $n = 1$, u est une homothétie et sa matrice est diagonale, donc de Frobenius, dans n'importe quelle base.
Supposons le résultat acquis pour les espaces de dimension comprise entre 1 et $n-1 \geq 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension $n \geq 2$.
Si u est cyclique, c'est alors terminé (son polynôme minimal est de degré n et il existe une base dans laquelle la matrice de u est la matrice compagnon de π_u).
Sinon, on a une décomposition $E = E_{u,x} \oplus G^\circ$ avec $E_{u,x}, G^\circ$ stables par u, la restriction de u à $E_{u,x}$ étant cyclique. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à G°, cet

espace étant de dimension $n-p_u$ comprise entre 1 et $n-1$ puisque $1 \leq p_u \leq n-1$.
En écrivant que F_k est la matrice compagnon de P_k, on a $P_1 = \pi_{u,x} = \pi_u$, $P_2 = \pi_v$, où v est la restriction de u à G°. De $P_1(u) = 0$, on déduit que $P_1(v) = 0$ et P_2 divise P_1.
La construction des F_k, nous montre que F_{k+1} divise F_k, pour tout k compris entre 1 et $r-1$.

Commutant d'un endomorphisme

1. Tout polynôme en u commute à u, donc $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$ et en particulier, $\mathcal{C}(u)$ est non vide.
Pour v, w dans $\mathcal{C}(u)$ et λ dans $\mathbb{K}$, on a :

$$u \circ (v + \lambda w) = u \circ v + \lambda u \circ w = v \circ u + \lambda w \circ u = (v + \lambda w) \circ u$$

donc $v+\lambda w \in \mathcal{C}(u)$ et $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (on peut aussi dire que $\mathcal{C}(u)$ est le noyau de l'endomorphisme $\varphi_u : v \mapsto u \circ v - v \circ u$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$).
D'autre part, $Id \in \mathcal{C}(u)$ et :

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w = (v \circ u) \circ w = v \circ (u \circ w) = v \circ (w \circ u) = (v \circ w) \circ u$$

donc $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$ et $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
En définitive, $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$, où $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i,m_j}(\mathbb{K})$, est dans $\mathcal{C}(u)$ si, et seulement si, $AD = DA$, ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_r A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 A_{r1} & \cdots & \lambda_r A_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_1 A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r A_{r1} & \cdots & \lambda_r A_{rr} \end{pmatrix}$$

soit à :

$$(\lambda_j - \lambda_i) A_{ij} = 0 \ (0 \leq i, j \leq r)$$

ou encore à $A_{ij} = 0$ pour $0 \leq i \neq j \leq r$.
L'espace $\mathcal{C}(u)$ est donc isomorphe à l'espace des matrices diagonales par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

où $A_{ii} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ et cet espace est de dimension $\sum_{k=1}^{r} m_k^2$.

3. Si u est cyclique, il existe alors $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $\mathcal{B}_{u,x} = \left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E. Pour $v \in \mathcal{C}(u)$, on peut alors écrire :

$$v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k \right)(x)$$

et comme v commute à u, on a pour tout entier j compris entre 1 et $n-1$:

$$v\left(u^j(x)\right) = u^j(v(x)) = u^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k \right)\left(u^j(x)\right)$$

et $v = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$ puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base $\mathcal{B}_{u,x}$. On a donc $v \in \mathbb{K}[u]$. On a donc ainsi montré que $\mathcal{C}(u) \subset \mathbb{K}[u]$ et l'égalité. Il en résulte que :

$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) = n$$

4. Comme $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, on a $\dim(\mathcal{C}(u)) \leq n^2$ (pour $u = Id$, on a $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$).
Soit $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F_r \end{pmatrix}$$

où les $F_k = C_{P_k} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ sont des matrices de Frobenius, P_k étant un polynôme unitaire de degré m_k.
Le polynôme caractéristique de u est alors :

$$P_u(X) = P_F(X) = \prod_{k=1}^{r} P_{F_k}(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k(X)$$

et $\sum_{k=1}^{r} \deg(P_k) = \sum_{k=1}^{r} m_k = n$.
Un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$, où $A_{ii} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$, est dans $\mathcal{C}(u)$ si, et seulement si, chaque matrice A_{ii} est dans le commutant $\mathcal{C}(F_i) = \mathbb{K}[F_i]$ (F_i est la matrice, dans la base canonique, d'un endomorphisme cyclique de $\mathbb{K}^{m_i}$).
L'ensemble $\mathcal{G}$ de ces endomorphisme est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\sum_{k=1}^{r} \dim(\mathcal{C}(F_k)) = \sum_{k=1}^{r} m_k = n$ et contenu dans $\mathcal{C}(u)$.
On a donc $n \leq \dim(\mathcal{C}(u))$.

5. On sait déjà que si u est cyclique, alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.
Réciproquement, si $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$, on a alors

$$n \leq \dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathbb{K}[u])$$

avec $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) \leq n$, donc $\deg(\pi_u) = n$, $\pi_u = P_u$ et u est cyclique.

Chapitre 8

Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$

Le but de ce second problème corrigé par Jean-Etienne Rombaldi est d'établir l'existence de la décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$ et d'en donner une conséquence topologique. Il s'agit d'un sujet zéro du CAPES 2011, donc d'un sujet conseillé pour son entraînement.

8.1 Énoncé

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
Notations et conventions
- $[\![1, n]\!]$: l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n.
- Si E est un ensemble, Id_E désigne l'application identité de E sur E.
- Si A est une matrice, ${}^tA$ désigne sa transposée.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.
- I_n : la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $GL_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices orthogonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. :

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n \right\}$$

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] : ensemble des matrices symétriques (respectivement symétriques positives, symétriques définies positives) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si E est un espace euclidien, $\mathcal{S}(E)$ [resp. $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$] désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (respectivement autoadjoints positifs, autoadjoints définis positifs) de E.

– I – Racine carrée d'une matrice symétrique réelle définie positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité d'une matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. (La matrice S est appelée la racine carrée de A).
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}^+(E)$ On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f, $E_1, \cdots, E_r$ les espaces propres respectivement associés à $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ et $d_1, \cdots, d_r$ leurs dimensions respectives.

1. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = g^2$.
   (a) Montrer que $f \circ g = g \circ f$ et en déduire que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, g laisse stable E_i. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note alors g_i la restriction de g à E_i.
   (b) Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
      i. Montrer que g_i est diagonalisable et que ses valeurs propres $\mu_{i,1}, \cdots, \mu_{i,d_i}$ sont positives.
      ii. Montrer que $g_i^2 = \lambda_i Id_{E_i}$ et en déduire que
      $$\mu_{i,1} = \cdots = \mu_{i,d_i} = \sqrt{\lambda_i}$$
      puis que $g_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_i}$.
   (c) En déduire que g est unique.
2. Utiliser **I.1.c.** pour montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = g^2$.
3. Conclure.

– II – Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$

Le but de cette partie est de montrer que pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe un et un seul couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. (Cette décomposition unique de M est appelée sa décomposition polaire.)

1. **Existence de** (O, S).

Soit donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On note alors S la racine carrée de ${}^tMM$ et on pose $O = MS^{-1}$.
   (b) Montrer que O appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et que $M = OS$.

2. **Unicité de** (O,S).
Soient $O,O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S,S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS = O'S'$.
Calculer ${}^tMM$ de deux façons différentes et en déduire $S = S'$ puis $O = O'$.

– III – Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et maximale pour cette propriété parmi les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. **Préliminaire.**
Pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose :

$$N(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

   (a) Montrer que l'application N ainsi définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme. Dans toute la suite du problème, on considérera le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi normé.

   (b) Soient une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = ((a_{ij}^{(p)}))_{1\leq i,j\leq n}$.
Montrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ la suite $(a_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.

   (c) Montrer que les applications t et p respectivement définies par :

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (A,B) & \mapsto & AB \end{array}$$

sont continues.

2. **Compacité de** $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

      i. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^n a_{ji}^2 = 1$.

      ii. En déduire que $N(A) \leq 1$.

   (c) En déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. **Propriété de maximalité.**
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que G soit une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in G$. On considère la décomposition polaire $M = OS$ de M.

   (a) Rappeler pourquoi il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ tels que $PSP^{-1} = D$.

   (b) Montrer que S et P appartiennent à G puis que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, D^p appartient aussi à G.

   (c) En déduire, en utilisant le fait que G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_i = 1$.

   (d) En déduire que $M = O$ et conclure.

8.2 Corrigé

– I – Racine carrée d'une matrice symétrique réelle définie positive

1.

   (a) $f = g^2$ est dans $\mathbb{R}[g]$ qui est une algèbre commutative, donc $f \circ g = g \circ f$.
   Pour tout $x \in E_i$, on a :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$$

   donc $g(x) \in E_i$. On a donc $g(E_i) \subset E_i$, c'est-à-dire que l'espace propre E_i est stable par g.
   Dans le cas où $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, on a $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$, donc g est un isomorphisme, $\dim(E_i) = E_i$ et $g(E_i) = E_i$.

   (b)

      i. Comme g est symétrique, on a pour tous x, y dans E_i :

$$\langle g_i(x) \mid y \rangle = \langle g(x) \mid y \rangle = \langle x \mid g(y) \rangle = \langle x \mid g_i(y) \rangle$$

      c'est-à-dire que $g_i \in \mathcal{S}(E_i)$ et il est diagonalisable dans une base orthonormée de E_i.
      Comme g est symétrique positif, il en est de même de g_i (pour tout $x \in E_i$, on a $\langle g_i(x) \mid x \rangle = \langle g(x) \mid x \rangle \geq 0$) et ses valeurs propres $\mu_{i,j}$ pour $1 \leq j \leq d_i$ sont positives.

ii. Pour tout $x \in E_i$, on a, $g^2(x) = f(x) = \lambda_i x$, donc $g_i^2 = \lambda_i Id_{E_i}$. En désignant par $(e_{i,j})_{1\leq j\leq d_i}$ une base orthonormée de E_i formée de vecteurs propres de g_i, avec $g_i(e_{i,j}) = \mu_{i,j} e_{i,j}$, on a :

$$f(e_{i,j}) = \lambda_i e_{i,j} = g^2(e_{i,j}) = \mu_{i,j}^2 e_{i,j} \ (1 \leq j \leq d_i)$$

et $\mu_{i,j} = \sqrt{\lambda_i}$ (puisque $e_{i,j} \neq 0$) pour $1 \leq j \leq d_i$.

(c) Comme $f \in \mathcal{S}^+(E)$ est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et on vient de voir que s'il existe $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = g^2$, on a nécessairement, pour tout i compris entre 1 et r, $g(x) = \sqrt{\lambda_i} x$ pour tout $x \in E_i$, ce qui détermine g de manière unique sur chaque E_i et donc sur E.

2. En définissant $g \in \mathcal{L}(E)$ par $g(x) = \sqrt{\lambda_i} x$ pour tout $x \in E_i$ et tout i compris entre 1 et r, on a $g^2 = f$. Comme g est diagonalisable à valeurs propres positives, il est dans $\mathcal{S}^+(E)$.
Dans le cas où $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, les λ_i sont tous strictement positifs, donc aussi les $\sqrt{\lambda_i}$ et $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

3. On a donc montré que pour tout $f \in \mathcal{S}^+(E)$ [resp. $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$], il existe un unique $g \in \mathcal{S}^+(E)$ [resp. $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$] tel que $f = g^2$.
Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$], elle définit dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ un unique endomorphisme $f \in \mathcal{S}^+(E)$ [resp. $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$] qui s'écrit de manière unique $f = g^2$ avec $g \in \mathcal{S}^+(E)$ [resp. $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$] et désignant par S la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] et $A = S^2$. L'unicité de S provient de l'unicité de g.

COMPLEMENTS

L'existence d'une unique racine carrée d'une matrice symétrique positive $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ peut aussi se montrer comme suit en précisant de plus que S est polynomiale en A. L'unicité d'une telle racine carrée symétrique positive peut se montrer en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange.
La matrice A étant symétrique positive a toutes ses valeurs propres réelles positives et se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $A = PD\,{}^tP$, avec :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En posant :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

et $S = P\Delta\ {}^tP$, on a $S^2 = A$, la matrice S étant symétrique positive (ses valeurs propres sont positives).
Si φ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ (le degré de φ est $p-1$ où p est le nombre de valeurs propres distinctes de A), alors

$$\varphi(A) = P\varphi(D)\ {}^tP = P\Delta\ {}^tP = S.$$

C'est-à-dire que S est polynomiale en A.
Si R est une autre racine carrée de A symétrique positive, on a alors $R^2 = A$ et R commute avec A, donc avec S. En définitive les matrices S et R commutent et sont symétriques, on sait alors qu'elles sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice Q dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que $R = Q\Gamma\ {}^tQ$ et $S = Q\Lambda\ {}^tQ$ avec Γ et Λ diagonales à coefficients réels positifs. De $R^2 = A = S^2$, on déduit alors que $\Gamma^2 = \Lambda^2$ et $\Gamma = \Lambda$ du fait que ces matrices sont diagonales à coefficients réels positifs. Et en définitive $S = R$.
Cette racine carrée S est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
En notant $S_1, \cdots, S_n$ les colonnes de la matrice S, la ligne numéro i de S est ${}^tS_i$ puisque S est symétrique et l'égalité $A = S^2$ se traduit par :

$$a_{ij} = {}^tS_iS_j = \langle S_i \mid S_j \rangle \ (1 \leq i, j \leq n).$$

On dit alors que A est une matrice de Gram. On a donc le résultat suivant.
Toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.
On montre de manière analogue que si $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors pour tout entier $p > 0$, il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^p$. De plus, si A est définie positive, il en est de même de S.

Exercice 8.1 *Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que AB a toutes ses valeurs propres réelles positives et est diagonalisable.*

Solution — Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$ et $AB = S^2B = S(SBS)S^{-1}$ est semblable à $D = SBS \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ (pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Dx \mid x \rangle = \langle B(Sx) \mid Sx \rangle \geq 0$ puisque $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$). Donc comme D, la matrice AB a toutes ses valeurs propres réelles positives et est diagonalisable.

– II – Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$

1.

2. (a) Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ est symétrique définie positive (puisque $\left\langle {}^tMMx \mid x \right\rangle = \|Mx\|^2 > 0$ pour x non nul) et elle admet une unique racine carrée symétrique définie positive S.

   (b) En posant $O = MS^{-1}$, on a $M = OS$ et :

$$ {}^tOO = {}^t\left(S^{-1}\right)\left({}^tMM\right)S^{-1} = \left({}^tS\right)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S = I_n $$

   c'est-à-dire que O est orthogonale.

3. L'indication n'est pas vraiment utile.
   Si $M = OS$, on a alors ${}^tMM = S\,{}^tOOS = S^2$ et S est nécessairement la racine carrée positive de la matrice symétrique définie positive ${}^tMM$. La matrice O est alors donnée par $O = MS^{-1}$ (A inversible entraîne S inversible). On a donc l'unicité des matrices O et S.

– III – Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

1.

   (a) On a $N(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $|\lambda a_{ij}| = |\lambda|\,|a_{ij}|$ et $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$ pour tout réel λ, toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous i, j compris entre 1 et n, on déduit que

$$ N(\lambda A) = |\lambda|\,N(A) $$

   et $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$. Enfin l'égalité $N(A) = 0$ équivaut à $|a_{ij}| = 0$ pour tous i, j compris entre 1 et n, ce qui équivaut à $A = 0$.
   En définitive, N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, la suite réelle $(N(A_p - A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et avec :

$$ \left|a_{ij}^{(p)} - a_{ij}\right| \leq N(A_p - A) \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}^{(p)} - a_{ij}\right| $$

   pour tous p, i, j, on déduit que cela équivaut à dire que pour tout $(i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!]^2$ la suite $(a_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.

(c) L'espace normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toute application linéaire [resp. bilinéaire] est continue. Il en est donc ainsi de t (qui est linéaire) et de p (qui est bilinéaire).

2.

(a) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $A \mapsto {}^tAA = p(t(A), A)$.

(b)

i. Le coefficient d'indice (i,i) de ${}^tAA = I_n$ est, pour i compris entre 1 et n :

$$1 = \left({}^tAA\right)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \left({}^tA\right)_{i,j} (A)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$$

ii. On en déduit alors que, pour tous i, j compris entre 1 et n :

$$a_{ji}^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = 1$$

soit $|a_{ji}| \leq 1$ et $N(A) \leq 1$.

(c) En conclusion$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N)$ en tant que fermé borné (on est en dimension finie).

3. **Propriété de maximalité.**

(a) La matrice S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = Q^{-1}SQ = {}^tQSQ$ soit diagonale. De plus, comme S est définie positive, ses valeurs propres, à savoir les termes diagonaux de D, sont strictement positifs. La matrice $P = Q^{-1} = {}^tQ$ est aussi orthogonale et on a $PSP^{-1} = D$.

(b) On a $M \in G$, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$, $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$ et G est un groupe multiplicatif, donc $S = O^{-1}M \in G$, $D = PSP^{-1} \in G$ et, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $D^p \in G$.

(c) Pour tout entier relatif p la matrice diagonale D^p, de termes diagonaux $\lambda_1^p, \cdots, \lambda_n^p$ est dans G. Mais si G est compact, il est en particulier borné et toutes les suites $\left(\lambda_i^p\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}^{+,*}$ $(0 < \lambda_i^p \leq N(D^p) = \max_{1\leq j\leq n} \lambda_j^p \leq M)$, ce qui impose que tous les λ_i valent 1.

(d) On a donc $D = I_n$, $S = I_n$ et $M = O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En définitive, $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

COMPLEMENTS

De la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on déduit que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où O est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \lim_{k\to+\infty} A_k$ où $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles. Avec le théorème de décomposition polaire, on peut écrire pour tout entier k, $A_k = O_k S_k$ où $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices orthogonales et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques définies positives. De la suite $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on peut extraire une sous-suite $\left(O_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De

$$S_k = O_k^{-1} A_k = {}^t O_k A_k$$

et de la continuité du produit matriciel, on déduit que la suite $\left(S_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. La limite S de cette suite est une matrice symétrique positive et $A = OS$.

Si A est de rang $r < n$, alors la décomposition ci-dessus n'est pas unique. En effet, on peut diagonaliser la matrice symétrique positive S dans une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $Se_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ où $\lambda_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n-r$ et $\lambda_i > 0$ sinon (si A n'est pas inversible alors il en est de même de S et 0 est valeur propre de S). Les Ωe_i sont alors uniquement déterminés pour $n-r+1 \leq i \leq n$, mais pour $1 \leq i \leq n-r$ il n'y a pas unicité.

Le théorème de décomposition polaire des matrices inversibles peut s'exprimer comme suit en utilisant la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

L'application $(O, S) \longmapsto OS$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

On sait déjà que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On déduit que l'application

$$\varphi : (O, S) \longmapsto OS$$

réalise une bijection de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Cette application est continue car ses composantes sont des fonctions polynomiales des coefficients ω_{ij} de O et s_{rp} de S. Il reste à montrer que φ^{-1} est continue.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A. On note $\varphi^{-1}(A_k) = (O_k, S_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi^{-1}(A) = (O, S)$. De la suite

$(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on peut extraire une sous-suite $\left(O_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De $S_k = {}^tO_kA_k$, on déduit que la suite $\left(S_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $S' = {}^tO'A$. La matrice S' est symétrique positive comme limite d'une suite de matrices symétriques positives et elle est définie puisque inversible.

On a alors la décomposition polaire $A = O'S'$. Cette dernière décomposition étant unique, on a nécessairement $O' = O$.

On a donc ainsi montré que la suite $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Elle converge donc vers O et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left({}^tO_kA_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}^tOA = S$. C'est-à-dire que la suite $((O_k, S_k))_{k\in\mathbb{N}} = \left(\varphi^{-1}(A_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(O, S) = \varphi^{-1}(A)$ et φ^{-1} est continue.

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, Exercices pour le CAPES mathématiques (externe et interne) & l'agrégation interne, Algèbre, arithmétique et géométrie, Vol. I, Publibook, 2005.

[2] D.-J. Mercier, O. Nakoulima, Fonctions de plusieurs variables réelles, Exercices et problèmes corrigés pour la seconde année de licence de mathématiques et la préparation aux concours (CAPES, Agrégation...), Publibook, 2005.

[3] D.-J. Mercier, Exercices pour le CAPES mathématiques (externe et interne) & l'agrégation interne, Algèbre, arithmétique, géométrie et probabilités, Vol. II, Publibook, 2007.

[4] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées, Vol. I, Publibook, 2007.

[5] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[6] D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.

[7] Wikipedia, L'encyclopédie libre (http ://fr.wikipedia.org).

Autres publications de Dany-Jack Mercier :

Aux Editions Publibook[1] :

1. Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. IV : Géo. affine et euclidienne.
2. Annales 2005 (avec J.-E. Rombaldi).
3. Annales 2006 (avec J.-E. Rombaldi).
4. Annales 2009 (avec J.-E. Rombaldi).
5. Annales 2010 (avec J.-E. Rombaldi).
6. Annales du CAPES externe 1999 à 2005 (avec J.-E. Rombaldi).
7. Annales du CAPES interne 2002 à 2008.
8. Annales du CAPES externe 2006 à 2008 (avec J.-E. Rombaldi).
9. Annales de l'agrégation interne de 2005 à 2007 (avec J.-E. Rombaldi).
10. Annales de l'agrégation interne de 2008 à 2010 (avec J.-E. Rombaldi).
11. Cahiers de Mathématiques du Supérieur, Vol. I.
12. Cours de Géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation.
13. Ex. pour le CAPES math. et l'agrég. int. - Algèbre, arith. et géométrie, Vol. I.
14. Ex. pour le CAPES math. et l'agrég. int. - Algèbre, arith. et géométrie, Vol. II.
15. Fonctions de plusieurs variables réelles, ex.& prob. (avec O. Nakoulima).
16. Fondamentaux d'algèbre & d'arithmétique.
17. Fondamentaux de géométrie.
18. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. I.
19. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. II.
20. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. III.
21. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. IV.
22. Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours, Vol. 1.
23. Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours, Vol. 2.
24. Questions du jury d'oral du CAPES math. & réfl. sur la prépa. (avec F. Herbaut).
25. Recueil d'exercices et de problèmes d'algèbre, d'arithmétique et de géométrie.

Chez Lulu.com[2] :

1. OBJECTIF CAPES Maths, Master, TD 2010-11 Alg. Géo. Arith. - Sem. 1.
2. Propositions de plans pour des leçons d'oral du CAPES math., Vol. I.
3. TD 2009-10 : 100h de prépa. au CAPES ext. en alg., géo. & arith.

Sur internet :

Site MégaMaths (http://megamaths.perso.neuf.fr/).

[1] http ://www.publibook.com/boutique2006/auteur-universitaire.php ?auteur=9541
[2] http ://stores.lulu.com/megamaths

Autres publications de Jean-Etienne Rombaldi :

1. J.-E. Rombaldi. Problèmes corrigés d'analyse numérique. Masson (1996).
2. J.-E. Rombaldi. Thèmes pour l'agrégation de Mathématiques. EDP Sciences (1999).
3. J.-E. Rombaldi. Analyse matricielle. EDP Sciences (2000).
4. J.-E. Rombaldi. Éléments d'analyse réelle. EDP Sciences (2004).
5. J.-E. Rombaldi. Interpolation et approximation. Vuibert (2005).

Et toutes les annales de concours publiées avec D.-J. Mercier...